

Riassunti di Fisica

Fisica 1

Versione 1.03.05, 8 marzo 2005
Materiale scaricabile da www.studentibicocca.it

Introduzione

Tratto dalle lezioni di Fisica 1 del prof. Antonino Pullia, durante l'anno accademico 2003/04, dalle lezioni di Fisica 2 del prof. Marcello Fontanesi, durante l'anno accademico 2004/05, dalle lezioni di Fisica 3 del prof. Baldini durante l'anno accademico 2004/05, e altre fonti nella bibliografia. Composto con \LaTeX ¹. Le immagini sono state fatte con XFig, Xypic o 3dstudiomax. I grafici in Matlab o in Gnuplot.

Ultimo aggiornamento: 8 marzo 2005.

Se trovate errori, imprecisioni, stupidate cosmiche, per suggerimenti, per ottenere la versione elettronica o per ottenere i sorgenti \LaTeX :

gturra2000@katamail.com

Disclaimer

Di questo documento puoi farne quello che vuoi, distribuirlo, fotocopiarlo, usare come carta per accendere il camino o per non sporcare per terra quando imbianchi i muri, a patto che l'autore originale e la sua email vengano riportati in modo significativo insieme a questo disclaimer nella sua forma originale. Possono essere fatte modifiche solo allo scopo di migliorare il documento. L'autore sarà felice di ricevere una copia di queste modifiche. In nessun caso questo documento o parti di esso potranno essere utilizzati come fonte di lucro. L'unico eventuale ricavo ammesso è quello relativo alle spese di distribuzione, per esempio le spese di stampa. Questo documento non è la Bibbia, esso nasce per uso personale, ed è distribuito senza garanzia sui contenuti (se prendente un brutto voto studiando su questi appunti non prendetevela con me).

Notazioni

Purtroppo nelle figure spesso al posto delle lettere greche (α , β) viene riportato il loro nome in lettere latine: alfa (alpha), beta... Stessa cosa per i pedici o gli apici, al posto di T_1 T_1 e al posto di z^2 z^2 . La d delle derivate è dritta a differenza della d come variabile.

¹Non sai cos'è il \LaTeX : vergonati! Documentati subito, potresti non poterne farne a meno

Chiave Pubblica²

Se fate modifiche al documento allegate la firma con la vostra chiave. Chiave DSA & ElGamal dell'autore originale:

-----BEGIN PGP PUBLIC KEY BLOCK-----

Version: GnuPG v1.2.2 (GNU/Linux)

```
mQGIBDjdHhoRBAHgPP1dlFra7QvzK2ltACfgCQqXaV0ab1U/xeIH8X67ahvTXHcM
DwbG96hdN5jnoyTMw5dXp0gPoKP08FD38GU4pRhUWZ1Bxg0J9+J6c9Tf6v4kKzbi
412UU+HAzqHszF0tbSYosjPtlkgSuGnDWYTDyALZY2+1YaqCJCA9vwnQWQCg/6aC
aKQ6Te1H/k6V421sWmqTtvUD/2pF7FfbbZxZUin0ZxvUz4YSZ6fSD95PrWGoC9fM
owt2H/JttSnju8VS9/kNxHx+u2LXepxkSr3QcG1+hGIYCADkow430DTyfspXzzLV
HviwqqUarjU4rQAa7ovxTZHEXMjdzyxdpbtE14vTG3wCFMzEM9SIemrYdzhe1se
1CT0BADWb+KPJcmZQ+b7c2GgDyakFXAZ0BdC801mJc6/Jz0gbHzcEy5PIFGEIImi
K1HOQ6Sm0/oo3quQdXWnCzCeKh83KkaULFUealWEahUk3Ky0oHPKiiMPy/M5Muad
gJYMCT2IEEgdWtA8Mo+Til5TBYJ97dsxGvnxEAN11E60kyWRmrQnUnVnZ2VybyBU
dXJyYSA8Z3R1cnJhMjAwMEBrYXRhbWpCb5jb20+tCdSdWdnZXJvIFR1cnJhIDxn
dHVycmEyMDAwQGgthdGFtYWlsLmNvbT6IXgQTEQIAHgUCQN2VNgIbAwYLCQgHawID
FQIDAxYCAQIEAQIXgAAKCRDRSWLT8RHAe3sAAKcWqbGv5rqBxE+t4j60K416U44
HQCGyqwIkH0mqfoY31PwhR+R+uV5uz65AgOEON0eGhAIAPZCV7cIfwgXcqK61qlC
8wXo+VMROU+28W65Szgg2gGnVqMU6Y9AVfPQB8bLQ6mUrfdMZIZJ+AyDvWXpF9Sh
01D49V1f3HZSTz09jdv0meFXklN/biudE/F/Ha8g8VHMGH0fMlm/xX5u/2RXscB
qtNbno2gpXI61Brwv0YAWCv19Ij9WE5J280gtJ3kkQc2azNs0A1FHQ98iLMcfFst
jvbzySPAQ/ClWxiNjrtVjLhdONMO/XwXV00jHRhs3jMhLLUq/zzhsS1AGBGNfISn
CnLWhsQDGcgHKXrKlQzZlp+r0ApQmwJG0wg9ZqRdQZ+cfL2JSyIZJrrol7DVeky
CzsAAgIIAJiZiDt7HGyJtHCPWjigQpY3cEAMU9cY8csP1kwAGZsIoW9YfJhY7vCq
BtTP6fb2Ine0BAaVzeYNrcnveckoiUW7aRVYqiXiQkETy80ghZE7NKyZjJiNt8xf
vqa14Dnd8f5so77qGFuM3j1FnycwGtF/XAJN8tix+/mZN2csP68rchw1YvaOP0kd
yv98gPkJLzZFuy606e4hlAd7dAYP72RqEuy11hJxi1t7+428XLUpvM4D1mN55I9R
HZDgw2b59AQcIh4QxjWirjVHwA3VJOR/M9WBnX600+nv5mWX3i+/ImkIkUQUlsdh
jJU2T90q2mc4xdpP5JxoPhhWXC3MFn+IRgQYEQIABgUCON0eGgAKCRDRSWLT8RHA
e2zeAJ4kVKTFaAJG+FT190zdUP00HHyJRQCffZBcyKZTEhXfHp5KSz6Hzlpkzgo=
=C00q
```

-----END PGP PUBLIC KEY BLOCK-----

Fingerprint: 4DC8 E630 A911 49B5 8247 117C D149 62D3 F111 C07B

²Non sai cos'è una chiave pubblica e la firma digitale? Vergognati! Documentati subito (www.pgpi.com, www.rsasecurity.com)

Indice

Introduzione	ii
Disclaimer	ii
Notazioni	ii
Chiave Pubblica	iii
I Fisica 1	1
1 Grandezze e misure	2
1.1 Grandezze	2
1.2 Unità di misura	3
1.2.1 Unità fondamentali	3
1.2.2 Prefissi	4
2 Vettori	5
2.1 Versori e coordinate	5
2.2 Individuazione vettori	6
2.2.1 Passaggio da individuazione geometrica a individuazio- ne analitica	6
2.3 Operazioni tra i vettori	7
3 Cinematica	10
3.1 Vettore posizione	10
3.1.1 Vettore spostamento	11
3.2 Vettore velocità	11
3.2.1 Velocità Media	11
3.2.2 Velocità Istantanea	11
3.2.3 Velocità Scalare	11
3.3 Vettore accelerazione	11
3.4 Moto rettilineo uniforme	11
3.5 Moto uniformemente accelerato	12
3.5.1 Velocità in funzione dello spazio	12

3.6	Moto circolare uniforme	12
3.7	Moto circolare	13
3.8	Moto qualsiasi	14
3.9	Moto armonico	14
3.9.1	Moto armonico smorzato	15
3.10	Trasformazioni di Galileo	16
3.10.1	Invarianza e covarianza	16
4	Dinamica	17
4.1	Forze fondamentali	17
4.2	Altre forze	17
4.2.1	Forza elastica	17
4.2.2	Resistenza del mezzo	18
4.2.3	Attrito statico	18
4.2.4	Attrito dinamico	18
4.3	Leggi di Newton	18
4.4	Forze variabili	19
4.4.1	Forze variabili nel tempo	19
4.4.2	Forze variabili nello spazio	20
4.4.3	Forze variabili nella velocità	21
4.5	Forze apparenti	22
4.5.1	Terra	23
4.6	Quantità di moto	24
4.6.1	Sistema di N punti	25
4.7	Centro di Massa	25
4.7.1	Corpo continuo	26
4.7.2	Teorema di Pappo–Guldino	27
4.8	Impulso di una forza	27
4.9	Urti	28
4.9.1	Urti elastici	28
4.9.2	Urti completamente anelastici	29
4.10	Momento d'inerzia	30
4.10.1	Calcolo Momenti di Inerzia	31
4.10.2	Teorema di Steiner o degli assi paralleli	33
4.11	Momento di una forza	33
4.12	Momento angolare o della quantità di moto	34
4.12.1	Sistema di N punti	34
4.12.2	Conservazione del momento angolare	35
4.12.3	Rotazione intorno a O' mobile	35
4.12.4	Rotazione intorno ad un asse	35
4.12.5	Corpo simmetrico rispetto all'asse di rotazione	36

4.13	Analogia tra grandezze lineari e rotazionali	36
5	Lavoro ed energia	37
5.1	Lavoro definizione	37
5.1.1	Lavoro nei moti rotatori	38
5.2	Potenza	38
5.2.1	Potenza nei moti rotatori	38
5.3	Energia Cinetica	39
5.3.1	Teorema lavoro-energia	39
5.4	Complementi – Funzioni in due variabili	39
5.4.1	Circuitazione di una forza	40
5.5	Energia Potenziale	41
5.5.1	Conservazione dell'energia meccanica	41
6	Gravitazione	45
6.1	Cenni storici	45
6.1.1	Leggi di Keplero	45
6.2	Teorema di Gauss (per la gravità)	46
6.2.1	Caso crosta sferica	46
6.2.2	Caso sfera piena	47
6.3	Interpretazione delle leggi di Keplero	48
6.3.1	Seconda legge	48
6.3.2	Terza legge	49
6.4	Accelerazione di gravità	49
6.5	Misurazione della costante di gravitazione universale	50
6.6	Massa gravitazione e massa inerziale	50
6.7	Principio di equivalenza	51
6.8	Energia associata ad un'orbita	51
7	Meccanica dei fluidi	52
7.1	Fluidostatica	52
7.1.1	Pressione e densità	52
7.1.2	Legge di Stevino	53
7.1.3	Legge dei vasi comunicanti	54
7.1.4	Esperimento di Torricelli 1664	54
7.1.5	Esperimento delle due semisfere	55
7.1.6	Principio di Pascal	55
7.1.7	Principio di Archimede	56
7.1.8	Condizione generale di equilibrio	57
7.1.9	Fluido in rotazione	58
7.2	Dinamica dei fluidi	59

7.2.1	Equazione di continuità	60
7.2.2	Equazione di Bernoulli	61
7.3	Viscosità	62
7.3.1	Legge di Poiseuille	63
8	Termodinamica	65
8.1	Principio zero della termodinamica	66
8.2	Temperatura	66
8.2.1	Termometro a gas perfetto a volume costante	67
8.3	Legge dei gas perfetti	67
8.4	Dilatazione termica	67
8.4.1	Dilatazione termica dei solidi	67
8.4.2	Dilatazione termica dei liquidi	68
8.5	Teoria cinetica del gas perfetto	68
8.5.1	Pressione	69
8.5.2	Libero cammino medio	71
8.5.3	Distribuzione delle velocità	71
8.5.4	Distribuzione dell'energia	73
8.5.5	Riassunto teoria cinetica dei gas perfetti	75
8.6	Trasferimenti di calore	76
8.6.1	Irraggiamento	76
8.6.2	Conduzione	76
8.6.3	Convezione	77
8.7	Capacità termiche	77
8.8	Energia interna	78
8.8.1	Principio di equipartizione dell'energia	78
8.8.2	Calore specifico molare dei solidi	78
8.8.3	Calore specifico dei gas	79
8.9	Primo principio della termodinamica	79
8.10	Trasformazioni di un gas	80
8.10.1	Calcolo del lavoro	80
8.10.2	Relazione di Mayer	81
8.10.3	Adiabatiche	82
8.10.4	Trasformazioni politropiche	82
8.11	Trasformazioni cicliche	83
8.11.1	Ciclo di Carnot per un gas perfetto	84
8.11.2	Frigorifero	85
8.11.3	Ciclo Otto	86
8.11.4	Diagrammi di flusso	87
8.12	Secondo principio della termodinamica	88
8.12.1	Kelvin \Leftrightarrow Clausius	88

8.12.2	Teorema di Carnot	88
8.13	Entropia	89
8.13.1	Entropia nei cicli	91
8.13.2	Entropia per qualsiasi trasformazione	93
8.13.3	Entropia e secondo principio	93
8.13.4	Interpretazione statistica dell'entropia	94
8.13.5	Grafici S/T	96
8.13.6	Generalizzazione del principio di Carnot	97
8.14	Scala termodinamica o assoluta	97
8.15	Riassunto trasformazioni	97
9	Relatività speciale	98
9.1	Esperimento di Michelson–Morley	98
9.2	Postulati di Einstein	101
9.2.1	Simultaneità	101
9.3	Trasformate di Lorentz	102
9.3.1	Trasformate di Lorentz e Galileo	105
9.4	Contrazione delle lunghezze	105
9.5	Dilatazione dei tempi	106
9.6	Composizione delle velocità	107
9.7	Massa	108
9.8	Quantità di moto	109
9.9	Energia Relativistica	110
9.9.1	Teorema lavoro–energia	110
9.9.2	Energia cinetica classica	111
9.9.3	Urti ed energia	111
9.9.4	Conservazione dell'energia	112
9.10	Quantità di moto ed energia	112
9.11	Elettronvolt	113
9.12	Forza e accelerazione	114
9.12.1	Casi Particolari	114
9.13	Spazio di Minkowski	116
9.13.1	Dilatazione dei tempi	116
9.13.2	Curve di calibrazione	117
9.14	Dubbi di Einstein	118
10	Onde	119
10.1	Onde sinusoidali	120
10.2	Corda Tesa	120
10.3	Equazione differenziale di un'onda	121
10.4	Velocità e accelerazione trasversale	122

10.5	Principio di sovrapposizione	122
10.5.1	Interferenza	122
10.6	Onde stazionarie	123
10.7	Effetto Doppler	124
10.7.1	Effetto Doppler relativistico	124
10.8	Suono	124
10.9	Grandezze caratteristiche	125
11	Ottica geometrica	127
11.1	Onde	127
11.2	Riflessione	129
11.2.1	Specchio piano	129
11.2.2	Elissoide	129
11.2.3	Specchi sferici	129
11.3	Rifrazione	129
11.3.1	Lenti sottili	130
A	Costanti	131
A.1	Costanti matematiche	131
A.2	Costanti universali	132
A.3	Costanti elettromagnetiche	133
A.4	Costanti atomiche e nucleari	133
A.4.1	Generali	133
A.4.2	Elettrone, e^-	134
A.4.3	Muone, μ^-	134
A.4.4	Tau, τ^-	134
A.4.5	Protone, p	135
A.4.6	Neutrone, n	135
A.4.7	Particella alfa, α	135
A.5	Costanti fisico-chimiche	135
A.6	Dati astronomici	136
B	Unità derivate	137
B.1	Elettrodinamica	137
C	Momenti d'inerzia	138
D	Formule che nessuno ricorda mai	139
D.1	Trigonometria	139
D.2	Sviluppi in serie di potenze	140
D.3	Operatori vettoriali	140

D.3.1	Gradiente	140
-------	---------------------	-----

Parte I

Fisica 1

Meccanica, Energia, Gravitazione, Fluidi,
Termodinamica, Relatività Speciale, Onde

*Se non si capisce è matematica
Se non funziona è fisica
Se puzza è chimica
Se è verdognolo e si muove è biologia*

1

Grandezze e misure

1.1 Grandezze

Le grandezze sono enti di cui si occupa la fisica. Esse devono essere misurabili attraverso un metodo operativo, richiedono unità di misura con le quali avviene il confronto.

Le grandezze si dividono in:

- grandezze scalari (numero, unità)
- grandezze vettoriali (numero, unità, direzione, verso) = (vettore, unità)
- grandezze tensoriali

L'unità di misura deve essere definita rispetto a qualcosa di invariante e riproducibile. La lunghezza è da considerarsi scalare, mentre la posizione vettoriale.

1.2 Unità di misura

1.2.1 Unità fondamentali

Nel sistema internazionale (SI) sono definite 7 unità di misura fondamentali:

Grandezza	Nome	Simbolo	Definizione
lunghezza	metro	m	“...la lunghezza è la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in $1/299792458$ di secondo”
massa	kilogrammo	kg	“...questo prototipo (un particolare cilindro di platino-iridio) potrà d’ora in poi essere considerato l’unità di massa”
tempo	secondo	s	“...la durata di 9192631.770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra i due livelli iperfini dello stato fondamentale dell’atomo di cesio 133”
corrente elettrica	ampere	A	“...quella corrente costante che, passando in due conduttori paralleli rettilinei infinitamente lunghi, di sezione circolare trascurabile, posti a 1 m di distanza nel vuoto produce tra i due conduttori una forza di $2 \times 10^{-7} \text{ N}$ per metro di lunghezza”
temperatura termodinamica	kelvin	K	“...la frazione $1/273.16$ della temperatura termodinamica del punto triplo dell’acqua”
quantità di sostanza	mole	mol	“...la quantità di sostanza di un sistema che contiene tale entità elementari quanti sono gli atomi contenuti in 0.012 kg di carbonio 12”
intensità luminosa	candela	cd	“...l’intensità luminosa, in una data direzione, di una sorgente che emette una radiazione monocromatica di frequenza $540 \times 10^{12} \text{ Hz}$ e la cui intensità energetica in tale direzione è di $1/683 \text{ W/sr}$ ”

1.2.2 Prefissi

Spesso si usano i seguenti prefissi¹:

fattore	prefisso	simbolo
10^{24}	yotta	Y
10^{21}	zetta	Z
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	kilo	k
10^2	etto	h
10^1	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a
10^{-21}	zepto	z
10^{-24}	yocto	y

¹personalmente preferisco di gran lunga la notazione esponenziale, l'uso dei prefissi la considero roba da ingegneri

2

Vettori

Un vettore è simile a un segmento orientato. In fisica ci si occupa di vettori nello spazio, cioè elementi di \mathbb{R}^3 . Ogni vettore è identificato con una terna di coordinate rispetto ad un riferimento cartesiano (ortonormale), oppure con: modulo, direzione e verso. Il modulo è la lunghezza del segmento, la direzione è la retta passante per il segmento, quindi per direzione si intende un angolo minore dell'angolo piatto, il verso indica l'orientazione del vettore. Ogni vettore si indica con una freccia sopra¹. \vec{v} è un vettore, $|\vec{v}|$, $\|\vec{v}\|$ o semplicemente v è il modulo del vettore.

I vettori sono da intendersi applicati nell'origine. Si può anche trattare di vettori non applicati nell'origine, chiamandoli vettori applicati, ma si rivelano del tutto equivalenti ai vettori usuali, infatti spesso gli si pensa come elementi di classi di equivalenza i cui rappresentanti sono i vettori applicati nell'origine.

2.1 Versori e coordinate

I versori sono vettori della base ortonormale di \mathbb{R}^3 (lo spazio) considerato con il prodotto scalare canonico. In parole povere sono vettori di modulo unitario ortogonali a due a due. Solitamente si indicano con \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} i versori applicati nell'origine, nella direzione degli assi cartesiani del sistema

¹altre notazioni sono \underline{v} , \boldsymbol{v}

di riferimento.

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Utilizzando i versori si possono esprimere i vettori in modo unico attraverso le coordinate:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

2.2 Individuazione vettori

I vettori si possono individuare in un sistema di riferimento per via geometria o per via analitica. Individuando un vettore per via geometrica si indica il modulo, e gli angoli che il vettore forma con gli assi cartesiani. Nello spazio:

$$\begin{cases} |\vec{v}| \\ \alpha, \beta, \gamma \end{cases} \quad \text{con} \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Per via analitica invece bisogna indicare le componenti del vettore rispetto agli assi, che sono le coordinate rispetto alla base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$: $\begin{cases} v_x \\ v_y \\ v_z \end{cases}$

2.2.1 Passaggio da individuazione geometrica a individuazione analitica

$$\begin{cases} v_x = |\vec{v}| \cos \alpha \\ v_y = |\vec{v}| \cos \beta \\ v_z = |\vec{v}| \cos \gamma \end{cases} \quad \begin{cases} |\vec{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \\ \cos \alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}|} \\ \cos \beta = \frac{v_y}{|\vec{v}|} \\ \cos \gamma = \frac{v_z}{|\vec{v}|} \end{cases}$$

2.3 Operazioni tra i vettori

Vettore inverso

Il vettore inverso ha stesso modulo del vettore, stessa direzione, ma verso opposto.

$$-\vec{v} = -(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) = -v_x\vec{i} - v_y\vec{j} - v_z\vec{k}$$

Naturalmente ogni vettore ha inverso e la loro somma è nulla e $-\vec{0} = \vec{0}$.

Somma

Per sommare due vettori per via geometrica si usa la regola del parallelogramma, per via analitica si sommano le componenti:

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) + (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}$$

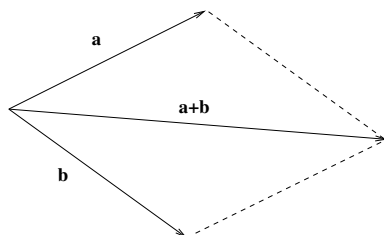


Figura 2.1: Regola del parallelogramma

Differenza

La differenza di due vettori è la somma del primo con l'inverso del secondo. Graficamente $\vec{a} - \vec{b}$ è il vettore che congiunge \vec{b} ad \vec{a} .

Prodotto per uno scalare

Per via geometrica il prodotto scalare di un vettore per uno scalare corrisponde al vettore con stessa direzione, con modulo moltiplicato per il valore assoluto dello scalare e verso invertito se lo scalare è negativo.

$$\forall h \in \mathbb{R} \quad \vec{p} = h\vec{a} = h(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) = ha_x\vec{i} + ha_y\vec{j} + ha_z\vec{k}$$

Prodotto scalare

Il prodotto scalare usato in fisica è il prodotto scalare canonico della geometria in \mathbb{R}^3 rispetto alla base canonica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$:

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)$$

$$p_s = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$

con α l'angolo compreso tra i due vettori. Da qui si deduce che $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$, ecc., che due vettori ortogonali hanno prodotto scalare nullo e che due vettori hanno prodotto scalare massimo quando sono paralleli.

$$p_s = \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Prodotto Vettoriale

Matematicamente il prodotto vettoriale non è facile da definire. Esso restituisce un vettore che ha direzione ortogonale al piano individuato dai due vettori, verso ricavabile dalla regola della mano destra, e modulo:

$$|\vec{p}_v| = ab \sin \alpha$$

con α angolo tra i due vettori.

$$\begin{aligned} \vec{p}_v &= \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \wedge (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} \end{aligned}$$

Il prodotto scalare può essere calcolato come determinante di una matrice 3×3 :

$$\vec{p}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Il prodotto vettoriale è anticommutativo cioè $\vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a})$. Il modulo del prodotto vettoriale è l'area del parallelogramma avente come lati i due vettori.

Prodotto Misto

Il prodotto misto è definito come:

$$p_m = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})$$

Esso rappresenta l'area del parallelepipedo avente come spigoli i vettori \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} .

Derivata di un vettore

La derivata di un vettore è la derivata delle coordinate per i rispettivi versori, (i versori sono costanti). Per esempio la derivata della velocità rispetto al tempo è:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

Gradiente

I matematici hanno inventato un nuovo simbolo, ∇ , detto “grad” o “gradiente” che non è una quantità, ma un operatore matematico che genera un vettore da uno scalare. Esso ha le seguenti componenti: la componente x di questo “grad” è $\partial/\partial x$, la componente y di questo “grad” è $\partial/\partial y$, la componente z di questo “grad” è $\partial/\partial z$, e dunque abbiamo il divertimento di scrivere le nostre formule per esempio in questo modo[10]:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

invece di

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)$$

3

Cinematica

3.1 Vettore posizione

Fissato un sistema di riferimento cartesiano¹ il vettore che congiunge l'origine con un punto è il vettore posizione \vec{r} che individua il punto in quel sistema di riferimento.

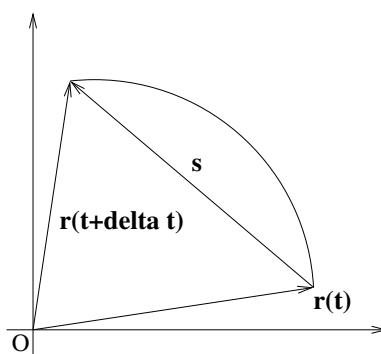


Figura 3.1: vettore posizione e spostamento

¹per semplicità quasi sempre si parlerà del piano piuttosto che dello spazio, ma i risultati sono del tutto analoghi

3.1.1 Vettore spostamento

$$\begin{aligned}\vec{s}(t, \Delta t) &= \Delta \vec{r} \\ &= \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = x(t + \Delta t) \vec{i} + y(t + \Delta t) \vec{j} - x(t) \vec{i} - y(t) \vec{j} \\ &= [x(t + \Delta t) - x(t)] \vec{i} + [y(t + \Delta t) - y(t)] \vec{j} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j}\end{aligned}$$

3.2 Vettore velocità

3.2.1 Velocità Media

$$\vec{v}_m(t, t + \Delta t) = \frac{\Delta \vec{r}(t + \Delta t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \{ \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} \} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j}$$

3.2.2 Velocità Istantanea

$$\vec{v}_i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_m(t, t + \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}(t) = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_t = \left. \frac{dx}{dt} \right|_t \vec{i} + \left. \frac{dy}{dt} \right|_t \vec{j}$$

3.2.3 Velocità Scalare

$$v_s = \frac{\text{spazio totale percorso}}{t}$$

3.3 Vettore accelerazione

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

3.4 Moto rettilineo uniforme²

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \overrightarrow{\text{const}}$$

$$d\vec{r} = \vec{v} dt \quad \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v} dt$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}t \quad \vec{r} = \vec{v}t + \vec{r}_0$$

²usiamo sempre condizioni iniziali implicite, del tipo $t_0 = 0$, $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$, $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$, ...

3.5 Moto uniformemente accelerato

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{a} = \overrightarrow{\text{const}} \\ \vec{a} dt &= d\vec{v} \quad \int_0^t \vec{a} dt = \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} \quad \vec{a}t = \vec{v} - \vec{v}_0 \\ \vec{v} &= \vec{a}t + \vec{v}_0 \\ \vec{v} &= \vec{a}t + \vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}}{dt} \\ d\vec{r} &= (\vec{a}t + \vec{v}_0) dt \quad \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_0^t (\vec{a}t + \vec{v}_0) dt \quad \vec{r} - \vec{r}_0 = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0t \\ \vec{r} &= \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0t + \vec{r}_0\end{aligned}$$

3.5.1 Velocità in funzione dello spazio

In certi casi può risultare molto comoda la formula relativa al moto uniformemente accelerato scritta in questo modo:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(r - r_0)$$

3.6 Moto circolare uniforme

Per moto circolare uniforme si intende quel moto su traiettoria circolare in cui il modulo del vettore velocità rimane costante nel tempo, mentre varia la sua direzione che è sempre tangente alla circonferenza. Definiamo la velocità angolare: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ e l'accelerazione angolare $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$; in realtà sono dei vettori.

$$\begin{aligned}|\vec{v}| &= \text{const} \\ \text{per convenzione } \vec{r}_0 &: \begin{cases} x = R \\ y = 0 \end{cases} \\ \vec{r} &= R \cos \theta \vec{i} + R \sin \theta \vec{j} \\ \theta = \frac{\text{arco}}{\text{raggio}} = \frac{vt}{R} = \omega t & \quad \omega = \dot{\theta} = \frac{v}{R} = \text{const} \\ \vec{r} &= R \cos(\omega t) \vec{i} + R \sin(\omega t) \vec{j} \\ \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} &= -R\omega \sin(\omega t) \vec{i} + R\omega \cos(\omega t) \vec{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{v}|^2 &= v_x^2 + v_y^2 = R^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) + R^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) \\ &= R^2 \omega^2 (\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) = R^2 \omega^2 \end{aligned}$$

$$v = \omega R$$

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{r}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = v_x x + v_y y = -R\omega \sin(\omega t) R \cos(\omega t) + R\omega \cos(\omega t) R \sin(\omega t) = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\omega^2 \cos(\omega t) \vec{i} - R\omega^2 \sin(\omega t) \vec{j} \\ &= -R\omega^2 (\cos(\omega t) \vec{i} + \sin(\omega t) \vec{j}) = -\omega^2 \vec{r} \end{aligned}$$

$$|\vec{a}|^2 = R^2 \omega^4 \cos^2(\omega t) + R^2 \omega^4 \sin^2(\omega t) = R^2 \omega^4$$

$$a = \omega^2 R = \omega v = \frac{v^2}{R}$$

3.7 Moto circolare

$$\vec{r} = R\vec{u}_r$$

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos \theta(t) \vec{i} + \sin \theta(t) \vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin \theta(t) \vec{i} + \cos \theta(t) \vec{j} \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \cos \theta \vec{i} - \dot{\theta} \sin \theta \vec{j} = -\dot{\theta} \vec{u}_r$$

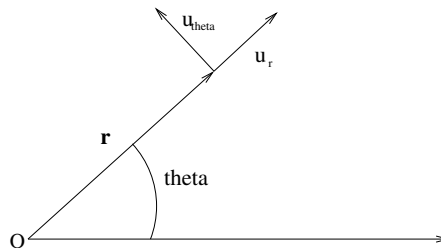


Figura 3.2: Coordinate polari

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(R\vec{u}_r)}{dt} = R \frac{d\vec{u}_r}{dt} \\ &= R (-\dot{\theta} \sin \theta \vec{i} + \dot{\theta} \cos \theta \vec{j}) = R\dot{\theta} \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(R\dot{\theta} \vec{u}_\theta)}{dt} = R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta + R\dot{\theta} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r$$

3.8 Moto qualsiasi

$$\vec{r}(t) = r\vec{u}_r$$

$$\vec{u}_r = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \quad \vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = -\dot{\theta} \sin \theta \vec{i} + \dot{\theta} \cos \theta \vec{j} = \dot{\theta} (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) = \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \cos \theta \vec{i} - \dot{\theta} \sin \theta \vec{j} = -\dot{\theta} (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) = -\dot{\theta} \vec{u}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{u}_r = \vec{u}_r (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \vec{u}_\theta (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$$

I vettori velocità e accelerazione vengono scomposti in due componenti:

- Velocità radiale: $v_r = \dot{r}$
- Velocità perpendicolare: $v_\theta = r\dot{\theta}$
- Accelerazione radiale: $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$
- Accelerazione perpendicolare: $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$

3.9 Moto armonico

Il moto armonico è un moto con equazione differenziale:

$$\ddot{x} = -kx$$

cioè:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x = \ddot{x}$$

$$k = \frac{1}{\omega^2} \quad x = -\frac{1}{\omega^2} \ddot{x}$$

Per esempi (pendoli, molle) vedi sezione [4.4.2](#) a pagina [20](#)

3.9.1 Moto armonico smorzato

Introduciamo nel moto armonico una forza smorzatrice, per esempio una forza d'attrito che varia con la velocità:

$$F = -\gamma \frac{dx}{dt}$$

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} \quad m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{m} \quad \text{è un tempo} \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

se $\tau = \infty$ allora il moto non è più smorzato.

La soluzione generale è:

$$x(t) = Ae^{st}$$

$$\dot{x}(t) = sx(t) \quad \ddot{x}(t) = s^2x(t)$$

$$s^2x(t) + \frac{1}{\tau}sx(t) + \omega_0^2x(t) = 0$$

$$s_{1/2} = \frac{-\frac{1}{\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - 4\omega_0^2}}{2} = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \omega_0^2}$$

1° caso

$$\frac{1}{4\tau^2} - \omega_0^2 > 0 \quad \frac{1}{2\tau} > \omega_0 \quad \text{attrito molto forte}$$

$$s_{1/2} = -\frac{1}{2\tau} \pm \beta \quad \text{radici reali e } < 0$$

$$x(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}$$

2° caso

$$\frac{1}{4\tau^2} - \omega_0^2 < 0 \quad \omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2} > 0$$

$$s_{1/2} = \frac{-\frac{1}{\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - 4\omega_0^2}}{2} = -\frac{1}{2\tau} \pm i\omega$$

$$x(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t} = A_1e^{-\frac{t}{2\tau} - i\omega t} + A_2e^{-\frac{t}{2\tau} + i\omega t} =$$

$$= e^{-\frac{t}{2\tau}} (A_1e^{-i\omega t} + A_2e^{i\omega t})$$

$$e^{-\frac{t}{2\tau}} \quad \text{fattore frenante}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}}$$

3.10 Trasformazioni di Galileo

Le trasformazioni di Galileo sono equazioni valide nella meccanica classica che consentono di descrivere le coordinate di un sistema rispetto alle coordinate di un altro sistema che si muove di moto rettilineo uniforme rispetto al primo, che è detto sistema inerziale.

Primo osservatore “fermo”: $O \quad \vec{r} \quad \vec{v} \quad \vec{a}$
 Secondo osservatore in moto: $O' \quad \vec{r}' \quad \vec{v}' \quad \vec{a}'$
 In meccanica classica si assume: $t = t'$
 \vec{u} velocità di O' rispetto ad O .

Legge 3.1 $\vec{r}(t) = \overrightarrow{(O' - O)} + \vec{r}' = \vec{u}t + \vec{r}'$

Legge 3.2 (composizione delle velocità)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{u}t + \vec{r}') = \frac{d}{dt}(\vec{u}t) + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{u} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{u} + \vec{v}'$$

velocità assoluta = velocità relativa + velocità di trascinamento

Legge 3.3 (invarianza dell'accelerazione)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{u} + \vec{v}') = 0 + \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt'} = \vec{a}'$$

L'accelerazione quindi è invariante

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t & \text{trasformate di Galileo} \\ \vec{v} = \vec{u} + \vec{v}' & \text{somma delle velocità} \\ \vec{a} = \vec{a}' & \text{invarianza dell'accelerazione} \\ t = t' & \text{ipotesi del tempo assoluto} \end{cases}$$

Esse valgono nell'ipotesi che se $t = 0 = t'$ allora $\vec{r}' = \vec{r}$. Non esiste un sistema di riferimento assoluto.

3.10.1 Invarianza e covarianza

Una grandezza si dice invariante se è numericamente uguale alla sua trasformata, cioè $x = T(x) = x'$. Nelle trasformazioni di Galileo l'accelerazione è invariante rispetto alla trasformazione che trasforma le coordinate di O in quelle di O' . Nella relatività galileiana la lunghezza è invariante, nella relatività ristretta no.

Una legge si dice covariante se la sua espressione è uguale alla sua trasformata, cioè $f(x) = T(f(x))$.

4

Dinamica

4.1 Forze fondamentali

1. forza gravitazionale
2. forza elettromagnetica
3. forza nucleare debole
4. forza nucleare forte

Tutte le altre forze non sono altro che combinazioni di queste.

4.2 Altre forze

Molte forze sono descritte con leggi che approssimano il loro comportamento, consentendo un'analisi dinamica del sistema, senza dover considerare direttamente le forze fondamentali.

4.2.1 Forza elastica

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

con \vec{x} l'allungamento. Questa legge è valida per i corpi elastici e per allungamenti limitati.

4.2.2 Resistenza del mezzo

La resistenza del mezzo è quella forza che il fluido in cui è immerso un corpo in movimento esercita sul corpo. La forza è proporzionale alla velocità, ma può essere anche proporzionale al quadrato della velocità.

$$\vec{F} = -k\mu\vec{v}$$

oppure:

$$\vec{F} = -k\mu v\vec{v}$$

dove μ dipende dalla geometria del corpo, k dalla natura del mezzo.

4.2.3 Attrito statico

Le leggi sull'attrito vengono chiamate leggi di Leonardo.

Legge 4.1 (Prima legge di Leonardo) $f_s \leq \mu_s N$ con μ_s coefficiente di attrito statico

Legge 4.2 (Seconda legge di Leonardo) La forza di attrito è indipendente dalla superficie d'appoggio

4.2.4 Attrito dinamico

$$F_c = \mu_c N$$

μ_c = coefficiente di attrito dinamico. $\mu_c < \mu_s$

4.3 Leggi di Newton

Le leggi di Newton sono i principi della dinamica, legano due mondi distinti, quello del mondo esterno e quello della cinematica attraverso le forze. In quanto principi non hanno nessuna giustificazione.

Principio 4.1 (Primo principio della dinamica) Quando un corpo è soggetto ad una forza risultante nulla è possibile individuare una classe di riferimenti rispetto ai quali la sua accelerazione è zero.

Principio 4.2 (Secondo principio della dinamica)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

In realtà Newton formulò questa espressione come $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

Principio 4.3 (Terzo principio della dinamica) *Se un corpo esercita una forza su un altro corpo, il secondo corpo esercita una forza sul primo. Queste due forze sono uguali in modulo, hanno la stessa direzione e versi opposti.*

4.4 Forze variabili

In generale la forza è una funzione del tipo:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

il caso più semplice è quello in cui \vec{F} è una costante. La risoluzione di problemi con forze variabili si traduce spesso nella risoluzione di equazioni differenziali.

4.4.1 Forze variabili nel tempo

Una macchina viaggia alla velocità di 100 km/h, la forza dei freni varia nel tempo e quindi l'accelerazione impressa dai freni segue la legge $a = ct$ con $c = -3 \text{ m/s}^3$. Quanto ci mette la macchina a fermarsi?

$$v_0 = 100 \text{ km/h} \simeq 27.7 \text{ m/s}$$

$$c = -3 \text{ m/s}^3$$

$$a = ct$$

$$F = ma = mct$$

$$a = \frac{dv}{dt} = ct \quad \Rightarrow \quad dv = ct dt \quad \Rightarrow \quad \int_{v_0}^v dv = \int_0^t ct dt$$

$$v - v_0 = \frac{ct^2}{2} \quad v = \frac{ct^2}{2} + v_0$$

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \int_0^t v dt = \int_0^x dx \quad \int_0^t \frac{ct^2}{2} + v_0 dt = \int_0^x dx$$

$$\frac{ct^3}{6} + v_0 t = x \quad x = v_0 t + \frac{ct^3}{6}$$

$$v_f = 0 \quad v_f = 0 = \frac{ct^2}{2} + v_0 \quad t = \sqrt{\frac{-2v_0}{c}} \simeq 4.30 \text{ s}$$

4.4.2 Forze variabili nello spazio

Moto armonico delle molle

$$F = -kx = ma$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad x = -\frac{m\ddot{x}}{k}$$

Notare che una funzione del genere è il seno, cioè:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = \omega^2 x$$

$$x = -\frac{1}{\omega^2} \ddot{x}$$

Confrontando questa funzione con quella trovata prima si ha che:

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{m}{k} \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x = A \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi \right)$$

$$x_{\max} = A$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}} (t + T) + \varphi = \sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi + 2\pi$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}} T = 2\pi \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Moto del pendolo

$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} a_r = -\frac{v^2}{l} = -\omega^2 l \\ a_\theta = \frac{dv}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} mg \cos \theta - T = -m\omega^2 l = -m \frac{v^2}{l} \\ mg \sin \theta = \frac{dv}{dt} m \end{cases}$$

Materiale disponibile gratuitamente su www.studentibicocca.it

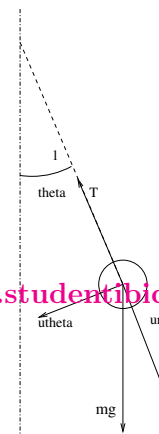


Figura 4.1: Pendolo semplice

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{v}{l} = \frac{d\theta}{dt} \\ |v| &= \omega l = l \frac{d\theta}{dt} \\ v &= -l \frac{d\theta}{dt} \\ mg \sin \theta &= -ml \frac{d^2\theta}{dt^2} \\ g \sin \theta &= -l \frac{d^2\theta}{dt^2}\end{aligned}$$

per piccole oscillazioni¹: $\sin \theta \simeq \theta$

$$\begin{aligned}g\theta &= -l \frac{d^2\theta}{dt^2} \\ g\theta &= -l\ddot{\theta} \quad \theta = A \sin(\omega t + \varphi) \\ \theta &= -\frac{l}{g} \ddot{\theta} \quad \ddot{\theta} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 \theta \\ \theta &= -\frac{\ddot{\theta}}{\omega^2} \quad \frac{1}{\omega^2} = \frac{l}{g} \quad \omega^2 = \frac{g}{l} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \\ \theta &= A \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \varphi\right)\end{aligned}$$

$$2\pi + \sqrt{\frac{g}{l}} t + \varphi = \sqrt{\frac{g}{l}} (t + T) + \varphi \quad \sqrt{\frac{g}{l}} T = 2\pi \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{2\pi}{\omega}$$

4.4.3 Forze variabili nella velocità

Su un corpo in caduta agisce la forza di Stokes: $F_s = -\beta v$, proporzionale alla velocità. β dipende dalla viscosità del mezzo e dalla geometria del corpo.

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m\vec{g} + \vec{F}_s = m\vec{a} \\ mg - F_s &= ma \\ mg - \beta v &= ma = m \frac{dv}{dt} \\ mg - \beta v &= m \frac{dv}{dt} \quad dt (mg - \beta v) = m dv\end{aligned}$$

¹è il primo sviluppo del polinomio di Taylor

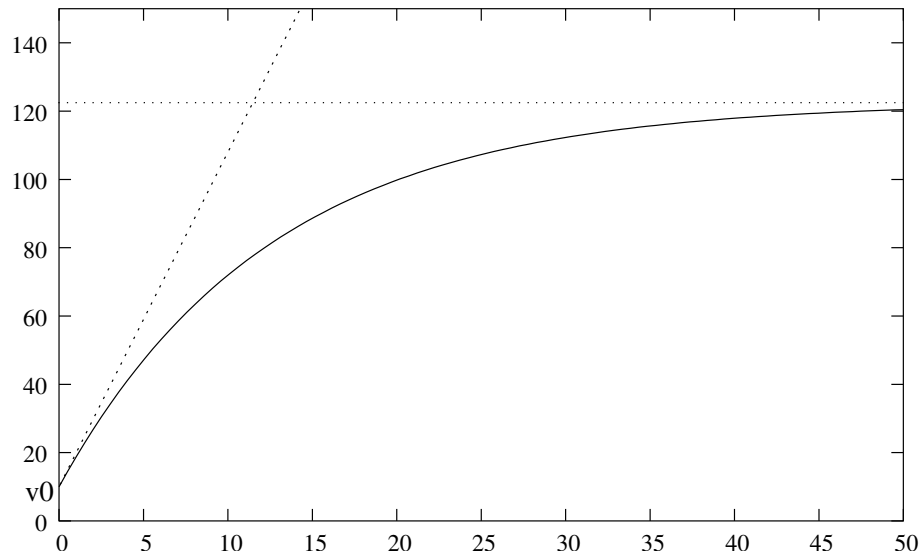


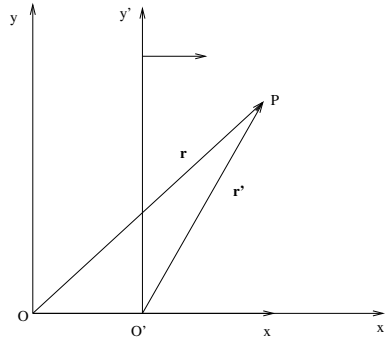
Figura 4.2: Grafico forza variabile nella velocità

$$\begin{aligned}
 \int_0^t dt &= \int_{v_0}^v \frac{m}{mg - \beta v} dv \\
 t &= \left[-\frac{m}{\beta} \ln (mg - \beta v) \right]_{v_0}^v = -\frac{m}{\beta} (\ln (mg - \beta v) - \ln (mg - \beta v_0)) = \\
 &= -\frac{m}{\beta} \ln \frac{mg - \beta v}{mg - \beta v_0} \quad -\frac{\beta t}{m} = \ln \frac{mg - \beta v}{mg - \beta v_0} \\
 e^{-\frac{\beta t}{m}} &= e^{\ln \frac{mg - \beta v}{mg - \beta v_0}} = \frac{mg - \beta v}{mg - \beta v_0} \\
 (mg - \beta v) &= (mg - \beta v_0) e^{-\frac{\beta t}{m}} \\
 v &= \frac{mg}{\beta} \left(1 - e^{-\frac{\beta t}{m}} \right) + v_0 e^{-\frac{\beta t}{m}} \\
 \text{se } t &\rightarrow +\infty \text{ allora } v \rightarrow \frac{mg}{\beta} \\
 \text{se } \beta &\rightarrow 0 \text{ allora } v \rightarrow gt + v_0
 \end{aligned}$$

4.5 Forze apparenti

Le forze apparenti non sono delle vere forze, sono degli strumenti che consentono di usare la seconda legge delle dinamiche anche in sistemi non inerziali. In particolare le forze apparenti non rispettano il terzo principio della dinamica. Siano O e O' due sistemi di riferimento; O' si muova verso destra con

accelerazione $\vec{a}_{O'}$ rispetto ad O . $\vec{r}_{O'}$ il vettore che individua O' rispetto ad O .



$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_{O'} \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{O'} \quad \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'}$$

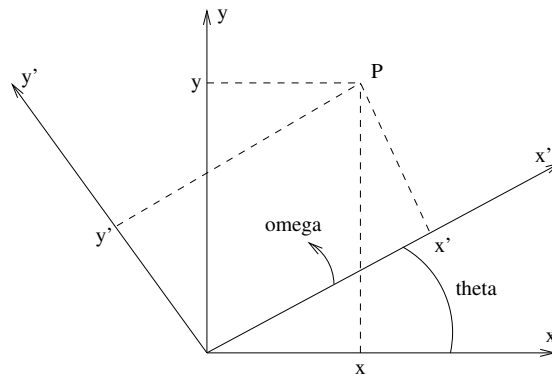
$$m\vec{a} = m\vec{a}' + m\vec{a}_{O'} = \vec{F}$$

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_{O'} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{app}}$$

$$\vec{F}_{\text{app}} = -m\vec{a}_{O'}$$

4.5.1 Terra

La Terra non è un sistema inerziale, infatti ruota intorno al Sole e ruota attorno al proprio asse. Consideriamo quest'ultimo moto:



$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = y' \cos \theta + x' \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = x'(t) \cos(\omega t) - y'(t) \sin(\omega t) \\ y(t) = y'(t) \cos(\omega t) + x'(t) \sin(\omega t) \end{cases}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v'_{x'} \cos(\omega t) - \omega x' \sin(\omega t) - v'_{y'} \sin(\omega t) - \omega y' \cos(\omega t)$$

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = a'_{x'} \cos(\omega t) - \omega v'_{x'} \sin(\omega t) - \omega v'_{y'} \sin(\omega t) - \omega^2 x' \cos(\omega t) - \\ &\quad - a'_{y'} \sin(\omega t) - \omega v'_{y'} \cos(\omega t) - \omega v'_{x'} \cos(\omega t) + \omega^2 y' \sin(\omega t) \\ &= a'_{x'} \cos(\omega t) - a'_{y'} \sin(\omega t) - \omega^2 [x' \cos(\omega t) - y' \sin(\omega t)] - \\ &\quad - 2\omega [v'_{x'} \sin(\omega t) + v'_{y'} \cos(\omega t)] \\ &= a_x = a'_{x'} - \omega^2 x - 2\omega v'_{y'} \end{aligned}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{v}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ v'_{x'} & v'_{y'} & v'_{z'} \end{vmatrix} = -\omega v'_{y'} \vec{i} + \omega v'_{x'} \vec{j}$$

$$\begin{cases} a_x = a'_{x'} - \omega^2 x + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}')_x \\ a_y = a'_{y'} - \omega^2 y + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}')_y \end{cases}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' - \omega^2 \vec{r} + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}')$$

$$m\vec{a} = m\vec{a}' - m\omega^2 \vec{r} + 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}') = \vec{F}$$

$$ma' = \vec{F} + \underbrace{m\omega^2 \vec{r}}_{\text{forza centrifuga}} - \underbrace{2m(\vec{\omega} \times \vec{v}')}_{\text{forza di Coriolis}}$$

$$\vec{F}_{\text{cent}} = m\omega^2 \vec{r} \quad \vec{F}_{\text{Cor}} = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}')$$

Esempio 4.1 (pendolo di Foucault) Se mettiamo un pendolo al polo la forza centrifuga sarà nulla perché $r = 0$, ma esiste ancora la forza di Coriolis. Sperimentalmente si osserva che il piano di rotazione del pendolo ruota a causa della non inerzialità della Terra.

4.6 Quantità di moto

$$\vec{p} \stackrel{\text{def}}{=} m\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\text{Newton disse: } \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

4.6.1 Sistema di N punti

La quantità di moto totale di un sistema di N punti è la somma delle quantità di moto.

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \\ \frac{d\vec{p}}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i = \\ &= \sum_{i=1}^N \overset{\text{Est}}{\vec{F}_i} + \sum_{i=1}^N \overset{\text{Int}}{\vec{F}_i} = \sum_{i=1}^N \overset{\text{Est}}{\vec{F}_i}\end{aligned}$$

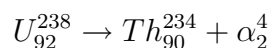
Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il terzo principio della dinamica. Si conclude che in un sistema isolato, cioè con $\sum_{i=1}^N \overset{\text{Est}}{\vec{F}_i} = 0$ vale la legge di conservazione della quantità di moto: $\vec{p} = \text{const.}$

Esempio 4.2 (carrellini) Due carrellini di massa m e M si urtano frontalmente con velocità iniziali v e V .

$$P_i = P_f = 0 \quad P_f = MV + mv = 0$$

$$MV = mv \quad \frac{V}{v} = \frac{m}{M}$$

Esempio 4.3 (decadimento) L'uranio decade in questo modo:



$$\vec{p}_f = m_{Th} \vec{v}_{Th} + m_\alpha \vec{v}_\alpha = \vec{p}_0 = 0$$

$$m_{Th} v_{Th} = m_\alpha v_\alpha \quad v_\alpha = 2 \times 10^7 \text{ m/s}$$

$$v_{Th} = \frac{m_\alpha v_\alpha}{m_{Th}} = 3.4 \times 10^5 \text{ m/s}$$

4.7 Centro di Massa

Sistema di N punti: $\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N (\vec{r}_i m_i)}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N (\vec{r}_i m_i)}{M}$

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i m_i)}{M} \quad y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i m_i)}{M} \quad z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N (z_i m_i)}{M}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt}(m_i \vec{r}_i)}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N (m_i \vec{v}_i)}{M}$$

$$M\vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \vec{p}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} M\vec{v}_{CM} = M\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^N \overset{\text{Est}}{\vec{F}_i}$$

$$M\vec{V}_{CM} = \vec{P} \quad M\vec{a}_{CM} = \sum \overset{\text{Est}}{\vec{F}_i}$$

Se il sistema è isolato $\sum \overset{\text{Est}}{\vec{F}} = 0$

$$M\vec{a}_{CM} = 0 \Rightarrow \vec{a}_{CM} = 0$$

Si muove di moto rettilineo uniforme.

4.7.1 Corpo continuo

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int_V \vec{r} dm}{M}$$

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$\text{densità locale } \rho(x, y, z) = \frac{dm}{dV}$$

$$dm = \rho dV$$

$$M = \sum dm = \int_V dm = \int_V \rho dV$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int_V \vec{r} dV \rho}{M} = \frac{\int_V \rho \vec{r} dV}{\int_V \rho dV}$$

Se la densità è uguale in tutti i punti il centro di massa è solo un fattore geometrico:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int_V \vec{r} dV}{V}$$

Esempio 4.4 (semicirconferenza)

$$x_{CM} = 0 \quad \text{per simmetria}$$

$$\frac{dm}{M} = \frac{ds}{\pi r} \quad ds = r d\theta$$

$$dm = \frac{M ds}{\pi r} = \frac{M r d\theta}{\pi r} = \frac{M d\theta}{\pi}$$

$$y = r \sin \theta$$

$$y_{CM} = \frac{\int y dm}{M} = \frac{r}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = -\frac{r}{\pi} [\cos \theta]_0^\pi = -\frac{r}{\pi} (-1 - 1) = \frac{2r}{\pi}$$

Esempio 4.5 (cerchio bucato) Luna è il cerchio grande meno la piccolo (C) di raggio $\frac{r}{2}$ $y_{CM} = 0$ per simmetria

$$M^C = \rho \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \rho \pi \left(r^2 - \frac{r^2}{4}\right) = \frac{3}{4} \rho \pi r^2 \quad M^{\text{luna}} = \rho \left(\pi r^2 - \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2\right)$$

$$x_{CM}^{\text{pieno}} = 0 = \frac{x_{CM}^{\text{luna}} + x_{CM}^C M^C}{M^C + M^{\text{luna}}}$$

$$0 = x_{CM}^{\text{luna}} x_{CM}^C \frac{M^C}{M^{\text{luna}}} = x_{CM}^{\text{luna}} x_{CM}^C \frac{4M^C}{3\rho\pi r^2} = x_{CM}^{\text{luna}} x_{CM}^C \frac{4\rho\pi r^2}{4 \cdot 3\rho\pi r^2} = \frac{x_{CM}^{\text{luna}} x_{CM}^C}{3}$$

$$x_{CM}^{\text{luna}} = 3x_{CM}^C = \frac{R}{6}$$

4.7.2 Teorema di Pappo–Guldino

Teorema 4.1 (Pappo–Guldino) *Il volume generato dalla rotazione di una superficie è uguale all'area della superficie per la distanza percorsa dal centro di massa durante la rotazione.*

Esempio 4.6 (Semicerchio) L'area generata dalla rotazione del semicerchio è il volume della sfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$, la distanza percorsa dal centro di massa è $2\pi y$ con y l'ordinata del centro di massa, la superficie del semicerchio è $\frac{\pi r}{2}$, quindi

$$2\pi y \frac{\pi r^2}{2} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$y = \frac{4}{3\pi} r$$

4.8 Impulso di una forza

$$\begin{aligned} \vec{J}(t_1, t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} m \vec{a} dt = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{v}}{dt} dt = m \int_{t_1}^{t_2} d\vec{v} \\ &= m [\vec{v}_2 - \vec{v}_1] = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta \vec{p} \end{aligned}$$

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \Delta \vec{p}$$

Se il sistema è isolato si ha:

$$\begin{aligned}\Delta \vec{p}_1 &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{1,2} dt & \Delta \vec{p}_2 &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{2,1} dt \\ \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 &= \int \left(\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{2,1} \right) dt = 0 = \Delta \vec{p}_{\text{totale}} \\ \vec{p}_{\text{iniziale}} &= \vec{p}_{\text{finale}}\end{aligned}$$

4.9 Urti

Gli urti si classificano in elastici ed anelastici. Gli urti reali sono una via intermedia. Negli urti elastici si conserva tutta l'energia cinetica, agiscono solo forze conservative; durante l'urto l'energia cinetica si trasforma in energia potenziale, per poi tornare completamente energia cinetica. La quantità di moto si conserva sempre in quanto non agiscono forze esterne.

4.9.1 Urti elastici

Urti in 1 dimensione

$$\begin{cases} m_1 v_{i,1} + m_2 v_{i,2} = m_1 v_{f,1} + m_2 v_{f,2} & v_{1,f} = ? \\ \frac{1}{2} m_1 v_{i,1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{i,2}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{f,1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{f,2}^2 & v_{2,f} = ? \end{cases}$$

$$v_{1,f} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{i,2} - v_{i,2} \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}$$

$$v_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{i,1} - v_{i,2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

casi limite

$$1. \quad m_1 = m_2$$

$$v_{f,1} = v_{i,2}$$

$$v_{f,2} = v_{i,1}$$

$$\bullet \quad v_{i,2} = 0$$

$$v_{f,1} = 0$$

$$v_{f,2} = v_{i,1}$$

2. $m_2 \gg m_1$

$$\frac{m_1}{m_2} \simeq 0$$

$$v_{f,1} = -v_{i,1} + 2v_{i,2}$$

$$v_{f,2} = v_{i,2}$$

• $v_{i,2} = 0$

$$v_{f,1} = -v_{i,1}$$

$$v_{f,2} = v_{i,2} = 0$$

Urti in due dimensioni

Due corpi di massa m_1, m_2 , prima dell'urto velocità $\vec{v}_{i,2} = 0, \vec{v}_{i,1}$, il secondo corpo è fermo, dopo l'urto velocità $\vec{v}_{f,1}, \vec{v}_{f,2}$.

$$\begin{cases} m_1 \vec{v}_{i,1} = m_1 \vec{v}_{f,1} + m_2 \vec{v}_{f,2} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{i,1}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{f,1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{f,2}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 v_{i,1} = m_1 v_{f,1} \cos \varphi_1 + m_2 v_{f,2} \cos \varphi_2 \\ 0 = m_1 v_{f,1} \sin \varphi_1 - m_2 v_{f,2} \sin \varphi_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_{i,1}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{f,1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{f,2}^2 \end{cases}$$

Il sistema è formato da 3 equazioni, ma da 4 incognite $(\varphi_1, \varphi_2, v_{f,1}, v_{f,2})$, ha ∞^1 soluzioni.

Nel caso particolare di $m_1 = m_2$ si ha:

$$\frac{1}{2} m v_{i,1}^2 = \frac{1}{2} m v_{f,1}^2 + \frac{1}{2} m v_{f,2}^2$$

$$\begin{cases} v_{i,1}^2 = v_{f,1}^2 + v_{f,2}^2 \\ m^2 v_{i,1}^2 = m^2 v_{f,1}^2 + m^2 v_{f,2}^2 + 2m^2 v_{1,f} v_{2,f} \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{i,1}^2 = v_{f,1}^2 + v_{f,2}^2 \\ v_{i,1}^2 = v_{f,1}^2 + v_{f,2}^2 + 2v_{1,f} v_{2,f} \cos \alpha \end{cases}$$

quindi $\cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$, oppure $v_{1,f} = 0$ e $v_{2,f} = v_{1,i}$

4.9.2 Urti completamente anelastici

Negli urti anelastici il sistema perde la massima energia cinetica possibile, che non è tutta in quanto se il sistema perdesse tutta l'energia cinetica violerebbe la conservazione della quantità di moto. Si dimostra che questo caso è quello in cui dopo l'urto i due corpi rimangono attaccati.

Esempio 4.7 (pendolo balistico) Un proiettile di massa m , velocità v urta un pendolo balistico di massa $M > m$ e velocità $V = 0$. Prima dell'urto la quantità di moto totale del sistema è mv , dopo $(M + m)V$.

$$mv = (M + m)V$$

$$V = \frac{mv}{M + m}$$

Dopo l'urto il pendolo balistico, con il proiettile incorporato oscilla come un pendolo, l'energia meccanica si conserva, quindi $K_A = U(B)$

$$\frac{1}{2}(m + M)V^2 = (m + M)gh$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{mv}{M + m} \right)^2 = (m + M)gh$$

$$\frac{1}{2} \frac{m^2 v^2}{M + m} = (m + M)gh$$

$$v^2 = \frac{(m + M)gh \cdot 2(m + M)}{m^2} = \frac{2(m + M)^2 gh}{m^2}$$

$$v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gh}$$

Consideriamo un sistema di riferimento * inerziale rispetto al CM con la stessa velocità del CM.

$$\vec{P}_{\text{prima}}^* = (m + M)\vec{V}_{\text{CM}}^* = 0$$

$$\vec{P}_{\text{dopo}}^* = 0 \quad \text{sono attaccati} \quad \vec{v} = 0$$

Quindi tutta l'energia cinetica è persa.

4.10 Momento d'inerzia

Corpo rigido(CR): presi due punti qualsiasi la loro distanza rimane inalterata. Servono tre punti, quindi 9 coordinate, ma le distanze rimangono fisse nel tempo, quindi il corpo ha 6 gradi di libertà. Per descrivere il moto di un corpo bisogna dare 6 coordinate in funzione del tempo. Se fissiamo un asse di rotazione si ha un solo grado di libertà. In questo caso si ha una rotazione intorno ad un asse fisso. Ogni punto del CR descrive una circonferenza. θ è comune a tutti, quindi anche ω e α

$$ds_i = d\theta r_i$$

$$v_i = r_i \omega \quad a_t = \frac{dv_i}{dt} = \alpha r_i$$

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) = \frac{1}{2} I \omega^2$$

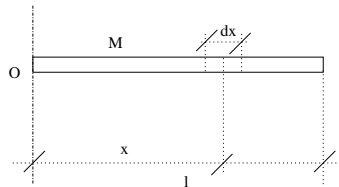
$$I = \text{momento d'inerzia} = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$$

$$\text{Nel caso di corpo continuo } \sum_{i=1}^{\infty} dm_i r_i^2 = \int_V r^2 dm$$

Essendo \vec{r} relativo a un punto O allora anche I sarà relativo ad O . Bisogna sempre specificare rispetto quale punto si calcola I .

4.10.1 Calcolo Momenti di Inerzia

Barra Sottile per l'estremo

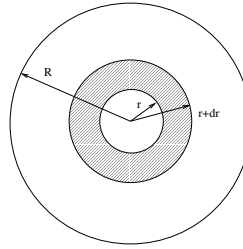


$$\frac{dm}{M} = \frac{dx}{l}$$

$$I_0 = \int_0^l \frac{M}{l} dx x^2 = \frac{M}{l} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l = \frac{M}{l} \frac{l^3}{3} = \frac{M}{3} l^2$$

Barra sottile per il centro di massa

$$I_c = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{M}{l} dx x^2 = \frac{M}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{M}{3l} \left(\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8} \right) = \frac{M}{12} l^2$$



Disco

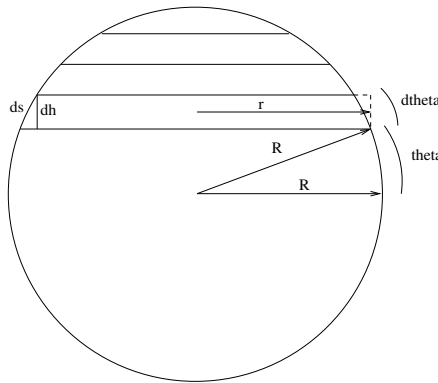
$$\frac{dm}{M} = \frac{2\pi r dr}{\pi R^2}$$

$$dm = M \frac{2dr}{R^2} r$$

$$I_O = \int_0^R \frac{M}{R^2} 2dr r^3 = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2M}{R^2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} M R^2$$

Sfera omogenea

Dividiamo la sfera in tanti dischetti:



$$r = R \cos \theta \quad ds = R d\theta \quad dh = ds \cos \theta = R d\theta \cos \theta$$

$$dm = \rho dV = \rho \pi r^2 dh = \rho \pi R^2 \cos^2 \theta R \cos \theta d\theta = R^3 \rho \pi \cos^3 \theta d\theta$$

$$I_{\text{dischetto}} = dI = \frac{1}{2} dm r^2 = \frac{1}{2} \rho \pi R^3 \cos^3 \theta d\theta R^2 \cos^2 \theta = \frac{1}{2} \rho \pi R^5 \cos^5 \theta d\theta$$

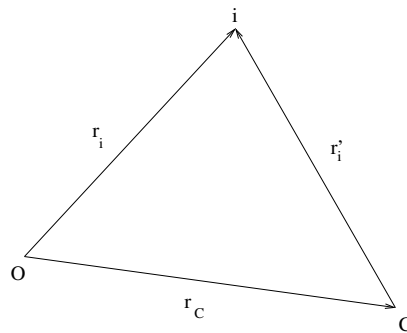
$$m = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$I_{\text{sfera}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dI = \frac{3}{4} m R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta d\theta = \frac{2}{5} m R^2$$

4.10.2 Teorema di Steiner o degli assi paralleli

Teorema 4.2 (Steiner o degli assi paralleli) Sia d la distanza da un asse di rotazione I_0 parallelo all'asse I_{CM} passante per il centro di massa. Allora:

$$I_0 = d^2 M + I_{CM}$$



$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}_i'$$

$$\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i = r_i^2 = (\vec{r}_C + \vec{r}_i') \cdot (\vec{r}_C + \vec{r}_i') \Rightarrow r_i^2 = r_C^2 + r_i'^2 + 2\vec{r}_C \cdot \vec{r}_i'$$

$$\begin{aligned} I_0 &= \sum m_i r_i^2 = \sum r_C^2 m_i + \sum r_i'^2 m_i + \sum m_i \cdot 2\vec{r}_C \cdot \vec{r}_i' \\ &= r_C^2 \sum m_i + I_C + 2\vec{r}_C \cdot \sum m_i \vec{r}_i' = d^2 M + I_C + 2\vec{r}_C \cdot \sum m_i \cdot \vec{r}_i' \end{aligned}$$

Per ipotesi C è il CM del sistema

$$I_0 = d^2 M + I_{CM} + 2\vec{r}_i \frac{\sum m_i \vec{r}_i'}{M} \cdot M = d^2 M + I_{CM} + 2\vec{r}_i \cdot \vec{r}_{CM}^M M = d^2 M + I_{CM}$$

Ma $Md^2 > 0$ quindi I_{CM} è il momento minimo possibile.

Esempio 4.8 Il momento d'inerzia di una circonferenza rispetto al centro di massa è $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$, per un estremo è:

$$I_0 = I_{CM} + MR^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2 > I_{CM}$$

4.11 Momento di una forza

$$\text{Rispetto al polo } 0 \text{ fisso: } \vec{\tau}_0 = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\delta L = dK \quad d\vec{s} = \vec{r}d\theta$$

$$\delta L = Fds \cos \phi = Frd\theta \cos \phi$$

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad dK = I\omega d\omega$$

$$Fr d\theta \cos \phi = I\omega d\omega$$

$$Fr \frac{d\theta}{dt} \cos \phi = I\omega \frac{d\omega}{dt}$$

$$Fr\omega \cos \phi = I\omega\alpha$$

$$Fr \cos \phi = I\alpha$$

$$Fr \sin \phi = I\alpha$$

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha} \quad \text{analoga a } \vec{F} = m\vec{a}$$

4.12 Momento angolare o momento della quantità di moto

$$\vec{l}_0 = \vec{r} \times m\vec{v} \quad \text{rispetto al polo 0 fisso.}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{l}_0}{dt} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{dm\vec{v}}{dt} \\ &= \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}_0 \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{l}_0}{dt} = \vec{\tau}_0 \quad \text{analoga a} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

4.12.1 Sistema di N punti

$$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^N \vec{l}_{0,i}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_0}{dt} &= \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{l}_{0,i}}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i + \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i = \\ &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \overset{\text{Int}}{\vec{F}_i} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \overset{\text{Est}}{\vec{F}_i} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \overset{\text{Est}}{\vec{F}_i} = \sum_{i=1}^N \overset{\text{Est}}{\vec{\tau}_0} \end{aligned}$$

Dimostrazione $\vec{\tau}_0^{\text{Int}} = 0$

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_{1,2} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{2,1} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{1,2} - \vec{r}_2 \times \vec{F}_{1,2} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{1,2} = 0$$

perché $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \parallel \vec{F}_{1,2}$

4.12.2 Conservazione del momento angolare

Se il sistema è isolato si ha: $\vec{F}^{\text{Est}} = 0 \Rightarrow \vec{\tau}^{\text{Est}} = 0$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\tau}_0 = 0 \quad \vec{L}_0 = \text{const}$$

e quindi $I\omega = \text{const}$. Tutto ciò per la simmetria per rotazioni.

4.12.3 Rotazione intorno a O' mobile

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{O'} + \vec{r}_i' \quad \vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{r}_{O'}$$

$$L_{O'} = \sum \vec{r}_i' \times m\vec{v}_i = \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_{O'}) \times m\vec{v}_i$$

$$\begin{aligned} \frac{dL_{O'}}{dt} &= \sum (v_i - v_{O'}) \times m\vec{v}_i + \sum \vec{r}_i' \times m\vec{a}_i = - \sum \vec{v}_{O'} \times m_i\vec{v}_i + \sum \vec{r}_i' \times \vec{F}_i \\ &= \vec{v}_{O'} \times \sum m_i\vec{v}_i + \vec{\tau}_{O'} = -\vec{v}_{O'} \times \vec{P} + \vec{\tau}_{O'}^{\text{Est}} \end{aligned}$$

$$\frac{dL_O}{dt} = -\vec{v}_{O'} \times \vec{P} + \vec{\tau}_{O'}^{\text{Est}}$$

se $v_{O'} = 0$ allora $-\vec{v}_{O'} \times \vec{P} = 0$

se $O' = CM$ allora $M\vec{V}_{CM} = \vec{P} \Rightarrow \vec{v}_{CM} \parallel \vec{P} \Rightarrow -\vec{v}_O \times \vec{P} = 0$

4.12.4 Rotazione intorno ad un asse

$$\vec{l}_i = \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i$$

$$l_{iz} = |\vec{l}_i| \sin \theta_i$$

$$|\vec{l}_i| = r_i m_i v_i \quad l_{iz} = r_i m_i v_i \sin \theta_i \quad \omega d_i = v_i$$

$$l_{iz} = m_i d_i \omega d_i = m d_i^2 \omega$$

$$l_{iz} = m_i \omega R_i^2$$

$$L_z = \sum l_{iz} = \sum (m_i d_i^2) \omega = I \omega$$

$$L_z = I \omega$$

$$\frac{dl_{iz}}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I \alpha \quad \frac{\text{Est}}{\tau_z} = I \alpha$$

4.12.5 Corpo simmetrico rispetto all'asse di rotazione

$$\vec{l}_i + \vec{l}_{i'} = \alpha \vec{k}$$

$$L = I \omega = L_z$$

4.13 Analogia tra grandezze lineari e rotazionali

Grandezze lineari		Grandezze rotazionali	
velocità	$\vec{v} = d\vec{r}/dt$	velocità angolare	$\vec{\omega} = d\phi/dt$
Accelerazione	$\vec{a} = d\vec{v}/dt$	Accelerazione angolare	$\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$
Massa	m	Momento d'inerzia	$I = \sum m r^2$
Forza	\vec{F}	Momento di una forza	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
Seconda legge di Newton	$\sum \vec{F} = m \vec{a}$	Seconda legge di Newton per moto rotatori con asse fisso	$\sum \vec{\tau} = I \alpha_z$
Condizione di equilibrio	$\sum \vec{F} = 0$	Condizione di equilibrio	$\sum \vec{\tau} = 0$
quantità di moto di una particella	$\vec{p} = m \vec{v}$	Momento angolare di una particella	$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$
quantità di moto di un sistema di particelle	$\vec{P} = M \vec{v}_{CM}$	Momento angolare di un sistema di particelle	$\vec{L} = I \omega$
Forma generale della seconda legge di Newton	$\sum \vec{F} = d\vec{P}/dt$	Forma generale della seconda legge di Newton per i moti rotatori	$\sum \vec{\tau} = d\vec{L}/dt$
Conservazione della quantità di moto di un sistema di particelle per il quale $\sum \vec{F} = 0$	$\vec{P} = \sum \vec{p}_n = \text{const}$	Conservazione del momento angolare di un sistema di particelle per il quale $\sum \vec{\tau} = 0$	$\vec{L} = \sum \vec{l}_n = \text{const}$

5

Lavoro ed energia

5.1 Lavoro definizione

Il lavoro è una grandezza scalare. Distinguiamo i seguenti casi particolari:

- a) Forza costante e parallela allo spostamento

$$L = F s$$

- b) Forza costante non parallela allo spostamento

$$L = F s \cos \alpha = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

- c) Forza parallela ma variabile

$$L = \int_A^B F(x) dx$$

- d) Forza variabile, traiettoria qualsiasi (caso generale)

$$\delta L = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$L = \int_A^B \delta L \text{ curvilineo}$$

Definizione 5.1 (lavoro) Definiamo lavoro L della forza \vec{F} sul punto P lungo il percorso Γ :

$$L = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (5.1)$$

Esempio 5.1 (attrito costante su traiettoria semicircolare)

$$F_A = \mu N = \mu mg \quad \delta L = \vec{F}_A \cdot d\vec{s} = -\mu mg ds$$

$$L = \int_A^B \delta L = \int_A^B -\mu mg ds = -\mu mg \int_A^B ds = -\mu mg \pi R$$

5.1.1 Lavoro nei moti rotatori

Corpo rigido ruotante attorno ad un asse. ds lo spostamento infinitesimale corrispondente a $d\theta$, ϕ l'angolo compreso tra la forza e il vettore \vec{r} :

$$\delta L = (F \sin \phi) ds = (F \sin \phi)(r d\theta) = (r F \sin \phi) d\theta = \tau_z d\theta$$

$$L = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau_z d\theta$$

Se durante la rotazione il momento torcente resta costante, il lavoro svolto da questo momento torcente è:

$$L = \tau_z \theta$$

5.2 Potenza

La potenza si misura nell'SI in J/s cioè W(watt).

$$P = \frac{dL}{dt}$$

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

5.2.1 Potenza nei moti rotatori

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{\tau_z d\theta}{dt} = \tau_z \omega$$

5.3 Energia Cinetica¹

Definizione 5.2 (energia cinetica)

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

A volte indicata con T .

5.3.1 Teorema lavoro–energia

$$\delta L = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} dt = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = m\vec{a} \cdot \vec{v} dt = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m\vec{v} d\vec{v} = mv dv$$

$$dK = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = d\left(\frac{1}{2}mvv\right) = \frac{1}{2}m(dvv + vdv) = \frac{1}{2}m2v dv = mv dv$$

$$\delta L = dK \quad \int_A^B \delta L = \int_A^B dK$$

Teorema 5.1 (lavoro–energia)

$$L = K_B - K_A = \Delta K$$

Il lavoro è allora la variazione dell'energia cinetica

5.4 Complementi – Funzioni in due variabili

$$z = f(x, y)$$

derivata parziale:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dx} \text{ considerando } y \text{ costante}$$

derivate seconde parziali:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Teorema di Shwartz: le derivate seconde parziali incrociate sono uguali:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

¹classica. Per quella relativistica vedi 9.9 a pag.110

Differenziale totale o esatto:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

è una forma differenziale lineare. Forma Differenziale lineare:

$$\delta G = H(x, y)dx + K(x, y)dy$$

Una forma differenziale lineare è un differenziale esatto se e solo se:

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial K}{\partial x}$$

Il lavoro elementare è una forma differenziale lineare:

$$\delta L = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_x dx + F_y dy = F_x(x, y)dx + F_y(x, y)dy$$

$$L_A^B = \int_A^B \delta L = \int_A^B F_x(x, y)dx + F_y(x, y)dy$$

$$\text{se } \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \Rightarrow \delta L = \text{differenziale totale}$$

$$\delta L = dL = dV$$

Allora si avrà, qualunque sia il cammino percorso:

$$L_A^B = \int_A^B dV = V(B) - V(A)$$

e la forza si dice conservativa.

$$F_x(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} \quad F_y(x, y) = \frac{\partial V}{\partial y}$$

In termini sintetici:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} V$$

Per dettagli sull'operatore gradiente vedi sezione 2.3 a pagina 9.

5.4.1 Circuitazione di una forza

È il lavoro calcolato su una traiettoria chiusa

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{se la forza è conservativa}$$

5.5 Energia Potenziale

$$U = -V$$

$$L_A^B = U(A) - U(B) = -\Delta U$$

Considerando l'energia potenziale in 0 nulla si ha²:

$$L_0^P = U(0) - U(P) = 0 - U(P)$$

$$U(P) = -L_0^P = -\int_0^P \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

5.5.1 Conservazione dell'energia meccanica

Considerando solo forze conservative:

$$L_A^B = U_A - U_B \quad L_A^B = K_B - K_A$$

$$U_A + K_A = U_B + K_B$$

$$U(P) + K = E = \text{const}$$

La somma di U e K è l'energia meccanica totale ed è costante.

Per verificare se una forza è conservativa:

1.

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

se sì allora è conservativa, se no non lo è

2.

$$U(0) = 0 \quad L_0^P = U(0) - U(P) = -U(P)$$

$$U(P) = -\int_0^P \vec{F} d\vec{s}$$

3. Verifica

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -F_x \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -F_y$$

Esempio 5.2 (Forza peso $F_x = 0 \quad F_y = mg$) 1. $\frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_y}{\partial x}$

²c'è molta confusione sulle notazioni, frequentemente quello che qui è chiamato V è chiamato U e l'energia potenziale U è chiamata V

$$2. U(P) = - \int_0^P \vec{F} d\vec{s} = \int_0^P F_x dx + F_y dy = \int_0^P mg dy = mgy$$

$$3. \frac{\partial U}{\partial x} = 0 = -F_x \quad \frac{\partial U}{\partial y} = mg = -F_y$$

Esempio 5.3 (Forza elastica $F_x = -kx$ $F_y = -ky$) 1. $\frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_y}{\partial x}$

$$2. U(P) = - \int_0^P \vec{F} d\vec{s} = \left(\int_0^P F_x dx + \int_0^P F_y dy \right) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}kr^2$$

$$3. \frac{\partial U}{\partial x} = kx = -F_x \quad \frac{\partial U}{\partial y} = ky = -F_y$$

Esempio 5.4 (Forza gravitazionale $\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$) 1.

$$F_x = \frac{-GMm}{r^3}x = -GMmx(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$F_y = \frac{-GMm}{r^3}y = -GMmy(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = GMmx \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{5}{2}}2y = \frac{\partial F_y}{\partial x} = GMMy \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{5}{2}}2x$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \Rightarrow \text{è conservativa}$$

2.

$$U(\infty) = 0$$

$$U(P) = - \int_{\infty}^P \vec{F} d\vec{s} = \int_P^{\infty} \vec{F} d\vec{s} = \int_P^{\infty} -\frac{GMm}{r^2} dr = \left[\frac{GMm}{r} \right]_r^{\infty} = -\frac{GMm}{r}$$

Calcolo della velocità di fuga

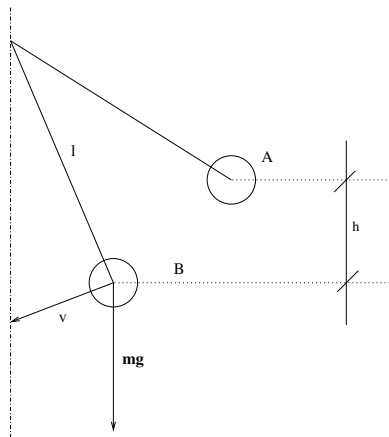
conservazione dell'energia: $E_A = E_B$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \left(\frac{-GMm}{r} \right) = \frac{1}{2}mv_{\infty}^2 + 0 \geq 0$$

Caso limite all' ∞ arriva fermo $v_{\infty} = 0$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r} = 0$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2Rg} \simeq 11 \times 10^3 \text{ m/s} \quad \text{dalla Terra}$$



Applicazione dell'energia a pendoli

Angoli non piccoli, $\vec{T} \perp \vec{v}$ $\vec{T} \perp d\vec{s}$

$$\delta L = \vec{T} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$U = mgh \quad K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$mgh + \frac{1}{2}mv^2 = E = \text{const}$$

A θ_0 si trova nella posizione A $K_A = 0$

$$E_A = 0 + mgh$$

In B $K_B \neq 0$ $E_B = K + mgh_B$

$$h = l - l \cos \theta$$

$$E_A = mg(l - l \cos \theta_0)$$

$$E_B = \frac{1}{2}mv^2 + mg(l - l \cos \theta)$$

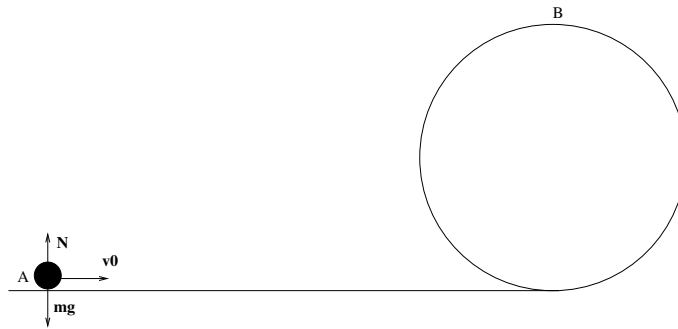
$$E_A = E_B$$

$$mgl(1 - \cos \theta_0) = \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1 - \cos \theta)$$

$$v^2 = 2gl(\cos \theta - \cos \theta_0)$$

Esempio 5.5 (arriva in alto?) La \vec{N} non compie lavoro perché $\vec{N} \perp d\vec{s}$

$$E_A = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 + mg2R$$



$$E_A = E_B \quad E_A = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mg2R$$

$$V_0^2 = V_B^2 + 4gR$$

Quando è in B

$$mg + N = m\frac{V_B^2}{R} \quad N = m\frac{V_B^2}{R} - mg \quad \text{per non cadere: } N \geq 0$$

$$m\frac{V_B^2}{R} \geq mg \quad V_B^2 \geq gR$$

$$V_{B\min}^2 = gR \quad V_{0\min}^2 = gR + 4gR \quad V_{0\min} = \sqrt{5gR}$$

6

Gravitazione

6.1 Cenni storici

I sistemi gravitazionali più celebri sono:

- sistema tolemaico. È un sistema geocentrico del II sec. d.C. Per ovviare ad alcuni errori, senza uscire dal dogma delle orbite circolari, Tolomeo suppose che i pianeti descrivessero degli epicili
- sistema copernicano. È un sistema eliocentrico del 1500 d.C.
- sistema ticonico di T.Brahe. È un sistema misto tra il sistema eliocentrico e geocentrico

Newton verso il 1665 teorizzò che le leggi celesti sono uguali a quelle terrestri: è una delle prime unificazioni di forze ritenute inizialmente diverse in un'unica forza.

6.1.1 Leggi di Keplero

Le leggi di Keplero sono leggi empiriche, formulate prima delle teorie di Newton:

Legge 6.1 (Prima legge di Keplero) *I pianeti descrivono intorno al Sole orbite ellittiche di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.*

Legge 6.2 (Seconda legge di Keplero) *Le aree descritte dal raggio vettore tracciato dal Sole ai pianeti sono proporzionali al periodo.*

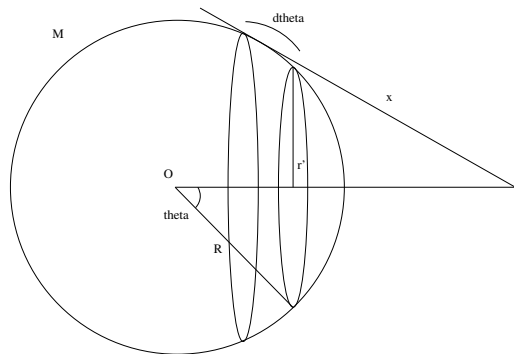
Legge 6.3 (Terza legge di Keplero) *I quadrati dei tempi impiegati dai pianeti a descrivere le proprie orbite sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle ellissi.*

6.2 Teorema di Gauss (per la gravità)

Con il teorema di Gauss si può supporre che gli effetti della gravità di un corpo su un altro, al suo esterno, siano uguali a quelli che si avrebbero se le masse fossero concentrate nel centro di massa.

6.2.1 Caso crosta sferica

dA è l'area compresa tra le due sezioni.



$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

$$r' = R \sin \theta \quad dA = 2\pi r' R d\theta$$

$$\frac{dm}{M} = \frac{dA}{4\pi R^2} = \frac{2\pi r' R d\theta}{4\pi R^2} = \frac{R \sin \theta d\theta}{2R} = \frac{\sin \theta d\theta}{2}$$

$$dm = \frac{M \sin \theta d\theta}{2}$$

$$U = -\frac{Gmm'}{r} \quad dU = -\frac{Gdmm'}{x}$$

$$x^2 = R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta$$

Derivando a sinistra in x e a destra in θ si ha:

$$2x \, dx = 2rR \sin \theta \, d\theta \sin \theta \, d\theta$$

$$\sin \theta \, d\theta = \frac{x \, dx}{rR}$$

$$\begin{aligned} U &= - \int_{\text{palla}} \frac{Gm'}{x} \, dm = - \int_{\text{palla}} \frac{Gm'}{x} \frac{M \sin \theta \, d\theta}{2} = - \frac{Gm'm}{2} \int_{\text{palla}} \frac{\sin \theta}{x} \, d\theta \\ &= - \frac{Gmm'}{2rR} \int \frac{x}{x} \, dx = - \frac{Gmm'}{2rR} \int_{r-R}^{r+R} dx = - \frac{Gmm'}{2rR} [r + R - r + r] \\ &= - \frac{Gmm'}{2rR} 2R = - \frac{Gmm'}{r} \end{aligned}$$

Possiamo quindi concentrare tutta la massa nel centro della palla (se P sta fuori). Se P è esterno:

$$U = - \frac{Gmm'}{r} \quad F = - \frac{dU}{dr} = \frac{Gmm'}{r^2}$$

Se P è interno vale il discorso precedente fino alla scelta degli estremi:

$$\begin{aligned} U(P) &= - \frac{Gmm'}{2rR} \int_{R-r}^{r+R} dx = - \frac{Gmm'}{2rR} [r + R - R + r] \\ &= - \frac{Gmm'}{2rR} 2r = - \frac{Gmm^2}{R} = \text{const} \\ \vec{F} &= - \frac{dU}{d\vec{r}} = 0 \end{aligned}$$

Quindi un punto all'interno del guscio non risente di alcuna forza, questo lo si può dimostrare ragionando con i coni, in quanto per ogni cono le forze sono uguali.

6.2.2 Caso sfera piena

All'esterno:

$$F = -G \frac{Mm'}{r^2}$$

Dentro:

$$\begin{aligned} F &= -G \frac{M^{\text{int}} m'}{r^2} \\ \frac{M^{\text{int}}}{M^{\text{tot}}} &= \frac{V^{\text{int}}}{V^{\text{tot}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^2 \rho}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho} \end{aligned}$$

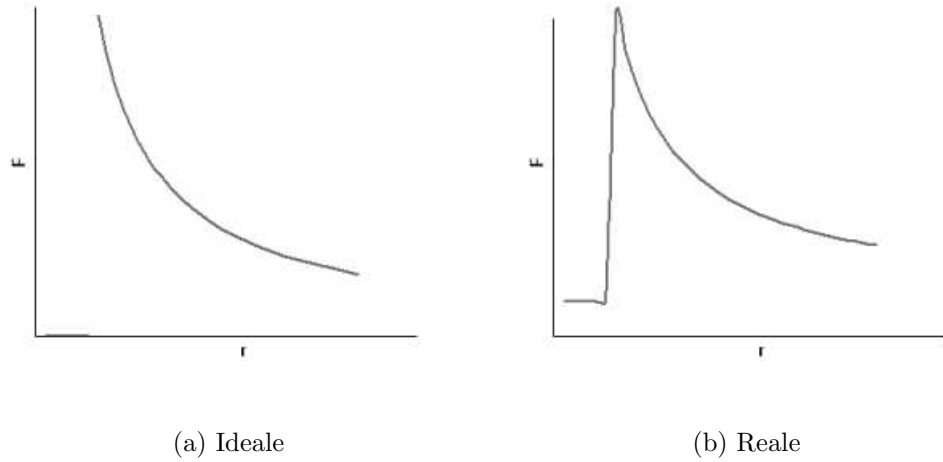


Figura 6.1: Forza in una sfera cava ideale (a) e reale (b)

$$M^{\text{int}} = \frac{r^3}{R^3} M^{\text{tot}}$$

$$F = -\frac{Gr^3 M^{\text{tot}} m'}{r^2 R^3} = -\frac{Gmm'r}{R^3} = -kr$$

ha l'espressione di una forza elastica.

Esempio 6.1 (posta pneumatica interterrestre) Immaginiamo di fare un buco che attraversa tutta la terra, passando per il centro. Un pacco lanciato al suo interno sarebbe sottoposto ad una forza del tipo:

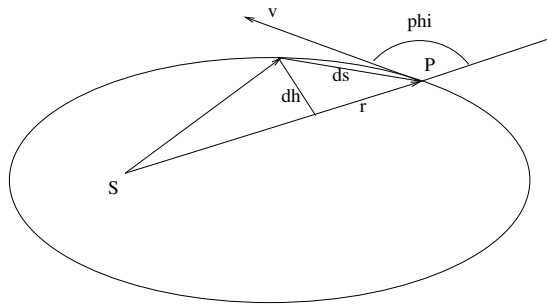
$$F = -kr \quad k = \left(G \frac{m' M_T}{R_T^3} \right)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m'}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_T^3}{GM_T}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_T}{g}} \simeq 40 \text{ min}$$

6.3 Interpretazione delle leggi di Keplero

6.3.1 Seconda legge

L'unica ipotesi che utilizziamo è che la forza sia centrale, quindi il risultato è estendibile a tutte le forze centrali. Una forza si dice centrale quando è diretta come la congiungente dei due punti che interagiscono.



$$\frac{d\vec{L}_S}{dt} = \vec{\tau}_S = 0 \quad \text{perché } \vec{F} \parallel \vec{r}$$

$$\vec{L}_S = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{const}$$

$$L_S = rmv \sin \phi = \text{const}$$

$$dh = ds \sin \phi$$

$$\text{velocità areolare} = \frac{dA}{dt} = \frac{rdh}{2dt} = \frac{r \sin \phi ds}{2dt} = \frac{r}{2} v \sin \phi$$

$$L_S = \frac{dA}{dt} 2m \quad \frac{dA}{dt} = \frac{L_S}{2m} = \text{const}$$

6.3.2 Terza legge

$$F = \frac{GM_S m}{R^2} = ma = \frac{mv^2}{R} = \omega^2 R m$$

$$\frac{GM_S}{R^2} = \omega^2 R \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{GM_S}{R^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} R \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_S} R^3$$

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} = \text{const}$$

6.4 Accelerazione di gravità

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Sulla Terra:

$$g = \frac{G \frac{M_T m}{R_T^2}}{m} = \frac{GM_T}{R_T^2} \simeq 9.836 \text{ m/s}^2$$

In realtà questo valore è variabile, dall'equatore ai poli, cioè circa tra $9.78 \div 9.86$, a causa della forza centrifuga e dallo schiacciamento dei poli. Per quanto riguarda la forza centrifuga questa è nulla ai poli e massima all'equatore quindi:

$$F_C = m\omega^2 R \quad F_N = mg_{\text{polo}}$$

$$\frac{F_C}{F_N} = \frac{\omega^2 R}{g_{\text{polo}}} = \frac{(2\pi)^2}{T^2} \frac{R}{g_{\text{polo}}}$$

6.5 Misurazione della costante di gravitazione universale

Cavendish con l'articolo "Misura della massa terrestre" nel 1798 è il primo a misurare la costante di gravitazione universale o costante di Cavendish. Cavendish si proponeva di misurare la massa terrestre e quindi indirettamente G .

La bilancia di torsione viene fatta oscillare, il momento è proporzionale all'angolo di scostamento dalla posizione di equilibrio, si genera un moto armonico.

$$\tau = -k\theta = I\alpha \quad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-k\theta = I\ddot{\theta} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} \quad I = 2mD^2$$

Da qui sperimentalmente si trova k . Avvicinando delle masse più grosse si genera un momento dovuto alla forza gravitazionale. Si impone che il momento gravitazionale sia uguale al momento dovuto alla forza elastica di richiamo.

$$\tau_{\text{Newton}} = 2\frac{GMm}{d^2}D = \tau_{\text{torsione}} = k\theta$$

$$G = \frac{k\theta d^2}{2MmD}$$

6.6 Massa gravitazione e massa inerziale

Per massa inerziale si intende quella grandezza usata in dinamica per esempio $\vec{F} = m\vec{a}$. Per massa gravitazionale si intende quella usata nella gravitazione

per esempio $F = G \frac{Mm}{r^2}$. Anche se la questione è aperta m_i è proporzionale a m_g infatti se B e C sono attratti da A si ha:

$$\frac{F_{BA}}{F_{CA}} = \frac{Gm_{Bg}m_{ag}}{Gm_{Cg}m_{ag}} = \frac{m_{Bg}}{m_{Cg}} = \frac{m_{Bi}a_b}{m_{Ci}a_c}$$

$$\text{se } a_C = a_B \Rightarrow \frac{m_{Bg}}{m_{Cg}} = \frac{m_{Bi}}{m_{Ci}} \Rightarrow m_{Bg} = \frac{m_{Cg}}{m_{Ci}} \cdot m_{Bi}$$

6.7 Principio di equivalenza

Principio 6.1 (equivalenza di Einstein) *nessun esperimento può rivelare la differenza tra un sistema di riferimento inerziale immerso in un campo gravitazionale \vec{j} e un sistema non inerziale con accelerazione costante $\vec{a} = -\vec{j}$*

6.8 Energia associata ad un'orbita

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{Mm}{r^2} = -G \frac{Mm}{2a}$$

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

$$p = \frac{L^2}{m\alpha}$$

$$\alpha = GMm$$

$$e = \text{eцентricità} = \sqrt{1 + 2 \frac{EL^2}{m\alpha}}$$

$e > 1$	$E > 0$	iperbole
$e = 1$	$E = 0$	parabola
$0 < e < 1$	$E < 0$	ellisse
$e = 0$	$E < 0$	circonferenza

7

Meccanica dei fluidi

La meccanica dei fluidi applica le leggi della meccanica classica ai fluidi, cioè ai liquidi e ai gas, descrivendo il tutto in termini di pressione, volume, portata.

7.1 Fluidostatica

7.1.1 Pressione e densità

La pressione è la forza sull'unità di superficie: $p = \frac{d|\vec{F}|}{dA}$. È una grandezza scalare, infatti la forza agisce sempre perpendicolarmente alla superficie. Se avesse una componente tangenziale il fluido si muoverebbe e non parleremmo più di fluidostatica. Un'altro modo analogo usando il vettore normale è

Definizione 7.1 (pressione)

$$p = \frac{d\vec{F} \cdot \vec{n}}{dA} \quad (7.1)$$

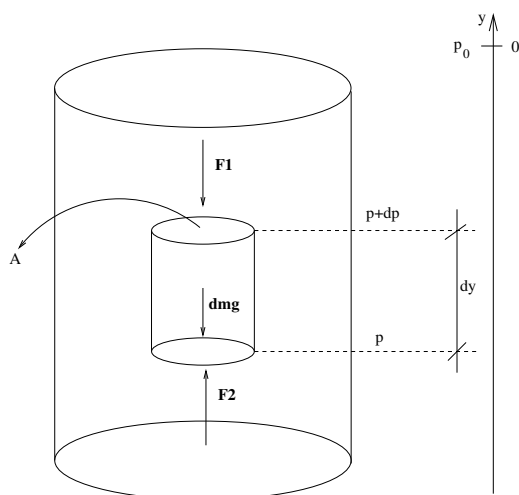
La pressione si misura in: $\text{N/m}^2 = \text{Pa}$ (pascal), che però è usualmente piccola, comuni sono anche: $\text{bar} = 10^5 \text{ Pa}$, $\text{Atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$, $\text{torr} = \text{mmHg} = 1/760 \text{ Atm}$.

Definizione 7.2 (densità (locale))

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dm}{dV} \quad (7.2)$$

si misura in kg/m^3

7.1.2 Legge di Stevino



Il liquido è in equilibrio quindi $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + dm\vec{g} = 0$. \vec{F}_1 è la forza dovuta alla parte superiore del fluido, \vec{F}_2 a quella inferiore.

$$-dmg - (p + dp)A + pA = 0 \quad -dmg - dpA = 0$$

$$dm = \rho dV = \rho A dy \quad -\rho A dy g - dpA = 0$$

$$dp = -\rho g dy$$

p_0 = pressione atmosferica

$$\text{Integrando: } \int_{p_0}^p dp = - \int_0^h \rho g dy = -\rho g \int_0^h dy$$

$$p = p_0 - \rho gh$$

Tutto ciò è valido considerando la densità costante, come per esempio in un liquido, in un gas ciò non è più possibile quindi ipotizziamo che

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} \Rightarrow \rho = \rho_0 \frac{p}{p_0}$$

$$dp = -\rho_0 \frac{p}{p_0} g dy \quad \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \int_0^y -\rho_0 \frac{g}{p_0} dy$$

$$\log p - \log p_0 = \log \frac{p}{p_0} = -\rho_0 \frac{g}{p_0} y$$

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} y}$$

$$p = p_0 e^{-\frac{y}{\lambda}} \quad \lambda = \frac{p_0}{\rho_0 g} \quad \text{è una lunghezza}$$

7.1.3 Legge dei vasi comunicanti

Nel tubo a U sono introdotti due liquidi non miscibili 1 e 2. Sotto ad A e B c'è solo il fluido 2. A e B sono alla stessa altezza, quindi:

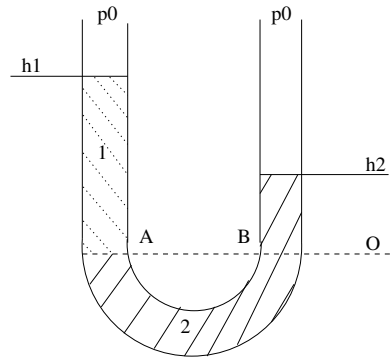


Figura 7.1: Vasi comunicanti

$$p_A = p_B \quad p_0 + \rho_1 g h_1 = p_0 + \rho_2 g h_2$$

$$\text{legge dei vasi comunicanti: } \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1}$$

7.1.4 Esperimento di Torricelli 1664

L'esperimento consiste nel riempire fino all'orlo un cilindro di mercurio e di rovesciarlo, senza far uscire il liquido, in una bacinella in cui c'è già del mercurio. Il livello del mercurio scende fino al livello di 0.76 m.

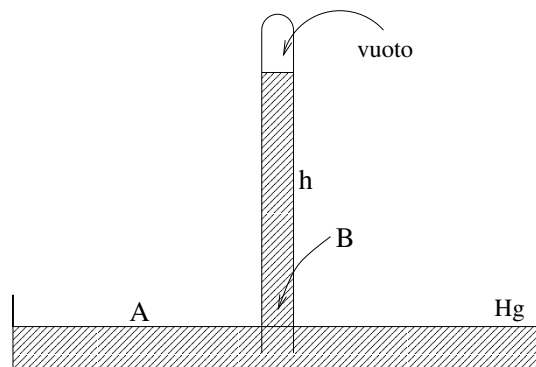


Figura 7.2: Esperimento di Torricelli

Il punto A e il punto B sono allo stesso livello, quindi: $p_A = p_B$

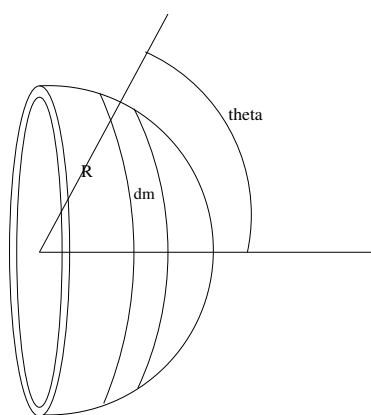
$$p_A = p_0 \quad p_B = \rho_{\text{Hg}} g h \quad p_0 = \rho_{\text{Hg}} g h = 1 \text{ Atm}$$

Si misura in questo modo la pressione atmosferica, in mmHg.

L'esperimento di Torricelli suscitò clamore perché Torricelli suppose che nella zona superiore del tubo ci "fosse" del vuoto.

7.1.5 Esperimento delle due semisfere

In due semisfere attaccate in modo da creare una sfera viene diminuita la pressione, togliendo aria. In questo modo la pressione esterna è maggiore ed esercita una forza sulle pareti delle semisfere, rendendo difficile la separazione.



Consideriamo la strisciolina dm

$$F = \int dF$$

$$dA = 2\pi R \sin \theta R d\theta = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$$

$$dF_x = p_0 2\pi R^2 \sin \theta d\theta \cos \theta$$

$$\frac{d \sin \theta}{d\theta} = \cos \theta \quad d \sin \theta = \cos \theta d\theta$$

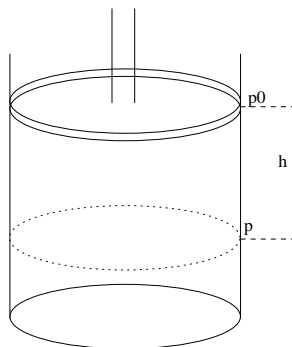
$$\int_S dF_x = p_0 2\pi R^2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = p_0 2\pi R^2 \int_0^1 \sin \theta d(\sin \theta) = p_0 \pi R^2$$

$$\text{se } R = 1 \text{ m} \quad F_x = 3.14 \times 10^5 \text{ N}$$

7.1.6 Principio di Pascal

Consideriamo un cilindro con un pistone che non esercita pressione.

Se applichiamo una forza sul pistone la pressione esterna, al livello del pistone, salirà da p_0 a $p_0 + p'_0$



Prima: $p = p_0 + \rho gh$

Dopo: $p = p_0 + p'_0 + \rho gh = p + p'_0$

cioè la variazione di pressione si trasmette in tutti i punti del fluido.

Paradosso di Pascal

Pascal si divertiva a rompere le botti infilandogli un tubo molto lungo, anche di sezione sottile, in quanto la sezione non conta, pieno d'acqua. La pressione faceva rompere le botti.

7.1.7 Principio di Archimede

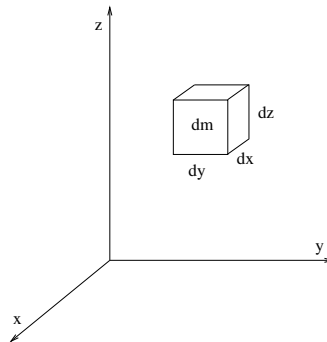
Consideriamo un elemento di un fluido. Su di esso agisce la forza peso, perché sia in equilibrio deve agire una forza uguale e contraria: la spinta di Archimede $\vec{S} = -\rho V \vec{g}$. Essa è dovuta alla differenza di pressione Δp . Se sostituiamo l'elemento di fluido con un solido il contorno non cambia e quindi la spinta di Archimede risulta uguale. Il peso però è cambiato, quindi in generale non è in equilibrio. Se $P > S$ cioè $\rho_{\text{solido}} > \rho_{\text{liquido}}$ sprofonda, altrimenti il corpo sale e bisogna considerare che una parte di questo emergerà e allora la spinta di Archimede diminuirà. La condizione di equilibri in questo caso è $V_{\text{immerso}} = V_t \frac{\rho_s}{\rho_l}$

ecco quello che dico-
no i nostri matematici

Esempio 7.1 (Iceberg) Ghiaccio in acqua \implies si scioglie

$$V_{\text{totale}} - V_{\text{emergente}} = V_{\text{totale}} \frac{\rho_{\text{ghiaccio}}}{\rho_{\text{acqua}}}$$

$$V_{\text{totale}} \simeq 10 V_{\text{emergente}}$$



7.1.8 Condizione generale di equilibrio

Forze di volume: proporzionali al volume

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{m}$$

notare che \vec{f} è un'accelerazione.

Forze di superficie: dovute al liquido che lo circonda, proporzionali alla superficie

$$F = pA$$

Lungo l'asse x :

$$f_x dm + p(x) dz dy - p(x + dx) dy dz = 0$$

$$f_x \rho dx dy dz + p(x) dy dz - (p(x) + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy dz = 0$$

$$f_x \rho dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = 0$$

$$f_x \rho = \frac{\partial p}{\partial x} \quad f_y \rho = \frac{\partial p}{\partial y} \quad f_z \rho = \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\vec{f} \rho = \vec{\nabla} p$$

Stevino

Nelle ipotesi di Stevino c'è solo il peso, quindi $\vec{f} = \vec{g}$

$$f_z \rho = \frac{dp_z}{dz} \quad g \rho dz = dp$$

Superfici isobariche

$$U_m = \frac{U}{m} \quad -\rho \vec{\nabla}(U_m) = \vec{\nabla}p \quad \vec{\nabla}(\rho U_m) = \vec{\nabla}p$$

$$\rho U_m = p + \text{const}$$

Segue che le superficie isobariche coincidono con le superfici equipotenziali. Nel caso agisca solo la forza peso esse sono dei piani orizzontali.

7.1.9 Fluido in rotazione

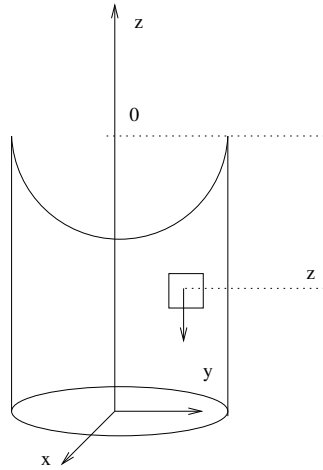


Figura 7.3: Elemento di un fluido in rotazione

Per lavorare in un sistema inerziale aggiungiamo la forza fittizia $m\omega^2 r$, r è la distanza dal centro generica, nel nostro caso R è la distanza dell'elemento dm dall'asse.

Nella direzione radiale $f_r = \omega^2 r$

$$f_r \rho = \rho \omega^2 y = \frac{dp}{dr} \quad dp = \rho \omega^2 y dr$$

$$\int_{p_{\text{asse}}}^p dp = \int_0^R \rho \omega^2 y dr$$

$$p - p_{\text{asse}} = \rho \omega^2 \frac{R^2}{2} \quad p = p_{\text{asse}} + \frac{\rho \omega^2}{2} R^2$$

$$p_{\text{asse}} = p_0 - \rho g z \quad p = p_0 - \rho g z + \frac{\rho \omega^2}{2} R^2$$

Su una superficie isobarica $p = \text{const}$, $p_0 = \text{const}$

$$\rho g z = \text{const} + \frac{\rho \omega^2}{2} R^2$$

$$z = \text{const} + \frac{\rho \omega^2}{2 \rho g} R^2 = \text{const} + \frac{\omega^2}{2g} R^2 = \text{const} + \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2)$$

È un paraboloide:

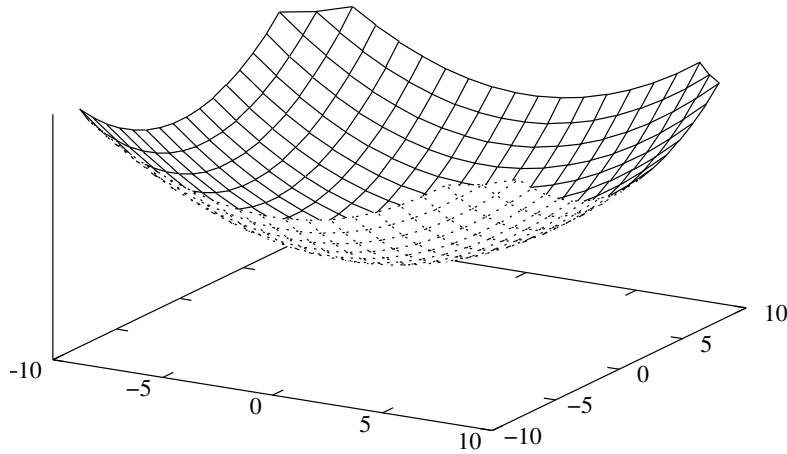


Figura 7.4: Paraboloide

Archimede per le rotazioni

se $\rho_s > \rho_f$ il corpo si muove verso l'esterno.

7.2 Dinamica dei fluidi

Approccio di Lagrange: si danno le coordinate x di un elemento di flusso in funzione del tempo, è un metodo di analisi complicato.

Approccio di Eulero: si studiano le caratteristiche del fluido in un determinato punto. Ci mettiamo in un punto dello spazio e vediamo come variano le grandezze in funzione del tempo. Per descrivere in modo completo bisogna ripetere le misurazioni in modo completo.

Vengono usate le semplificazioni:

1. fluidi:

- incompressibili ($\rho = \text{const}$)
- non viscosi (primi di attrito interno)

2. moto:

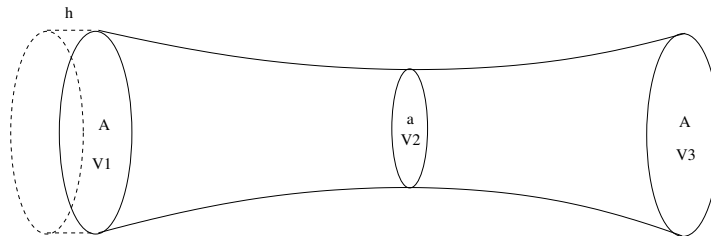
- stazionari (i fenomeni non dipendono dal tempo)
- irrotazionali (nessun vortice, non caotici), $\text{rot}(\vec{v}) = 0$, $\oint \vec{v} d\vec{s} = 0$

Linee di flusso: tangenti alla \vec{v} della particella. Ha senso se il moto è stazionario, cioè se \vec{v} è costante nel tempo.

Le linee di flusso danno origine al tubo di flusso. Non è possibile che vi sia fuoriuscita di fluido latente per definizione: \vec{v} è tangente alle linee di flusso.

7.2.1 Equazione di continuità

La portata volumica è la quantità di volume che passa nel tempo: $Q = \frac{dV}{dt}$, ma essendo in regime stazionario la velocità non varia, quindi $Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}$, la portata di massa è la quantità di massa nel tempo.



Fissiamo Δt tale che $h = v_1 \Delta t$

1. fluido che entra in Δt $\rho V = \rho A_1 v_1 \Delta t$
2. fluido che esce in Δt $\rho V = \rho A_2 v_2 \Delta t$

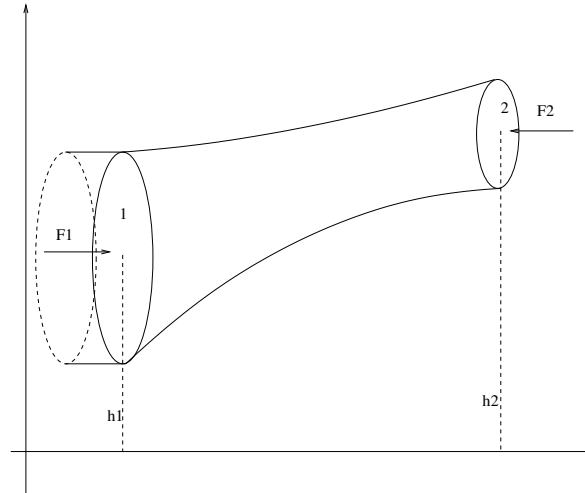
Naturalmente le masse entranti e uscenti sono uguali, quindi (legge di Leonardo):

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Portata volumica: $Q_v = Av$

Portata di massa: $Q_m = \rho Av$

7.2.2 Equazione di Bernoulli



Il lavoro è svolto dalle forze: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{P}$ è $L = \Delta K$

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho A_1 v_1 \Delta t = \rho A_2 v_2 \Delta t$$

$$\begin{cases} L_1 = F_1 \Delta S = F_1 v_1 \Delta t = p_1 A_1 v_1 \Delta t \\ L_2 = -F_2 \Delta S = -F_2 v_2 \Delta t = -p_2 A_2 v_2 \Delta t \\ L_P = -\Delta m g (h_2 - h_1) \end{cases}$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} \Delta m (v_2^2 - v_1^2)$$

$$L_1 + L_2 + L_P = \Delta K$$

$$p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t - \Delta m g (h_2 - h_1) = \frac{1}{2} \Delta m (v_2^2 - v_1^2)$$

$$\begin{aligned} & \Delta m \left[(gh_1 - gh_2) + \frac{p_1 A_1 v_1 \Delta t}{\Delta m} - \frac{p_2 A_2 v_2 \Delta t}{\Delta m} \right] \\ &= \Delta m \left[(gh_1 - gh_2) + \frac{p_1 A_1 v_1 \Delta t}{\rho A_1 v_1 \Delta t} - \frac{p_2 A_2 v_2 \Delta t}{\rho A_2 v_2 \Delta t} \right] \\ &= \Delta m \left[gh_1 - gh_2 + \frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho} \right] = L \\ &= \Delta K = \frac{1}{2} \Delta m (v_2^2 - v_1^2) \end{aligned}$$

$$gh_1 - gh_2 + \frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho} = \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2)$$

$$gh_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}v_1^2 = gh_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}v_2^2$$

Teorema di Bernoulli:

$$\rho gh + p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const}$$

L'espressione è molto simile alla conservazione dell'energia meccanica.

$$mgh + \frac{1}{2}mv^2 = \text{const}$$

Esempio 7.2 (ali di aereo) L'aria sotto le ali di un aereo è più lenta di quella che passa sopra, quindi dalla legge di Bernoulli, considerando l'altezza uguale:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const}$$

quindi se diminuisce v deve aumentare p e allora si ha una pressione dell'aria sull'ala e quindi la forza che tiene in aria l'aeroplano.

7.3 Viscosità

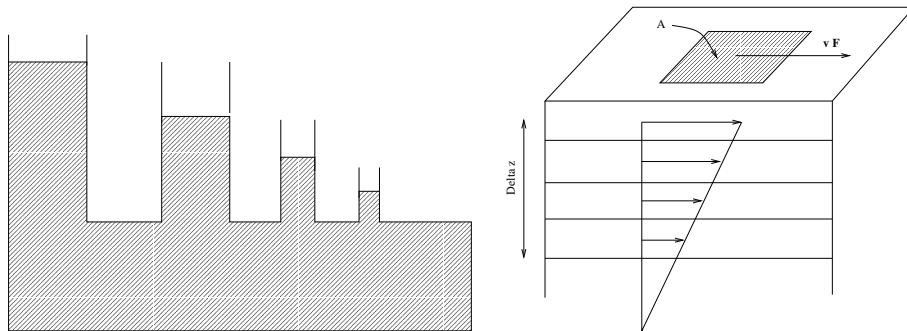
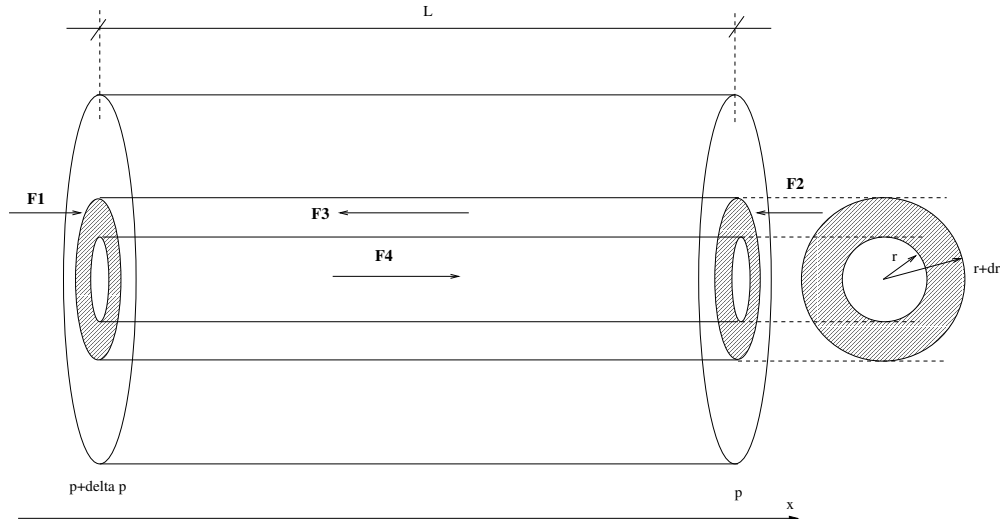


Figura 7.5: Perdita di pressione a causa della viscosità

La pressione diminuisce, si ha una perdita di carico per un fluido viscoso a causa degli attriti interni. Siamo a regime laminare (velocità basse).

$$F = \eta A \frac{dv}{dz} \quad \vec{F} = \eta A \vec{\nabla} v \quad \eta = \text{coefficiente di viscosità}$$

7.3.1 Legge di Poiseuille



La velocità sarà massima al centro e minima ai bordi. Considero la porzione di fluido tra r e $r + dr$. Le forze F_3 e F_4 sono dovute alle porzioni di fluido più esterne (più lente) e quelle più interne (più veloci).

$$F_1 = (p + \Delta p)2\pi r dr \quad F_2 = -p2\pi r dr$$

$$F_3 = L2\pi(r + dr)\eta \left. \frac{dv}{dr} \right|_{r+dr} \quad \frac{dv}{dr} < 0$$

$$F_4 = -L2\pi r \eta \left. \frac{dv}{dr} \right|_r$$

$$\sum F = 0 = (p + \Delta p)2\pi r dr - p2\pi r dr + L2\pi(r + dr)\eta \left. \frac{dv}{dr} \right|_{r+dr} - L2\pi r \eta \left. \frac{dv}{dr} \right|_r$$

$$\text{Taylor nell'intorno di } r: \quad \left. \frac{dv}{dr} \right|_x = \left. \frac{dv}{dr} \right|_r + \left. \frac{d^2v}{dr^2} \right|_r (x - r) + \dots$$

$$0 = \Delta p r dr + \eta L \left\{ (r + dr) \left. \frac{dv}{dr} \right|_{r+dr} - r \left. \frac{dv}{dr} \right|_r \right\} \simeq$$

$$\simeq \Delta p r dr + \eta L \left\{ (r + dr) \left[\left. \frac{dv}{dr} \right|_r + \left. \frac{d^2v}{dr^2} \right|_r dr \right] - r \left. \frac{dv}{dr} \right|_r \right\} =$$

$$= \Delta p r dr + \eta L \left\{ r \frac{dv}{dr} + r \frac{d^2v}{dr^2} dr + dr \frac{dv}{dr} + \frac{d^2v}{dr^2} dr - r \frac{dv}{dr} \right\} \simeq$$

$$\simeq \Delta p r dr + \eta L \left[r \frac{d^2 v}{dr^2} dr + \frac{dv}{dr} dr \right] = 0$$

$$\Delta p r + \eta L \left[r \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{dv}{dr} \right] = 0$$

$$r \Delta p + \eta L \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = 0$$

$$r \Delta p = -\eta L \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right)$$

$$\int r \Delta p dr = -\eta L \int \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) dr$$

$$\Delta p \frac{1}{2} r^2 = -\eta L r \frac{dv}{dr} + c \quad c = 0$$

$$\Delta p \frac{1}{2} r = -\eta L r \frac{dv}{dr}$$

$$\frac{\Delta p}{2} \int_R^r r dr = -\eta L \int_0^v dv$$

$$\frac{\Delta p}{4} [r^2 - R^2] = -\eta L v$$

$$v = -\frac{\Delta p}{4} \frac{r^2 - R^2}{\eta L} = \frac{\Delta p}{4\eta L} (R^2 - r^2)$$

$$\begin{aligned} Q_v &= \int v dA = \int_0^R 2\pi r dr v(r) = \int_0^R \frac{2\pi r \Delta p}{4\eta L} dr (R^2 - r^2) \\ &= \frac{1}{2} \pi \int_0^R \frac{r \Delta p}{\eta L} (R^2 - r^2) dr \\ &= \frac{\pi \Delta p}{2 \eta L} \int_0^R (r R^2 - r^3) dr = \frac{\pi \Delta p}{2 \eta L} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) \\ &= \frac{\pi \Delta p}{8 \eta L} R^4 \quad \text{Poiseuille} \end{aligned}$$

8

Termodinamica

In meccanica è utile utilizzare ipotesi nelle quali ci siano pochi gradi di libertà, per esempio con i fluidi si usa l'approccio di Eulero. In termodinamica si considerano più gradi di libertà.

La termodinamica si occupa di scambi di energia e di cambiamento di stato di sistemi macroscopici, descritti da un numero piccolo di variabili macroscopiche come temperatura, volume e pressione. Si tratta sempre di sostanza pure e omogenee (una sola fase).

Una variabile di stato è una variabile stazionaria (costante nel tempo), isotropa (uguale in tutte le direzioni), omogenea (uguale nello spazio).

Un sistema è la porzione di materia sotto osservazione, l'ambiente tutto il resto. L'universo termodinamico è l'unione del sistema con l'ambiente. Un sistema aperto scambia energia e materia con l'ambiente, un sistema chiuso scambia solo energia, un sistema isolato non scambia né energia né materia. Una parete adiabatica è una parete che non lascia passare calore, una diatermica lascia passare calore.

Le variabili di stato vanno considerate dopo un certo tempo di rilassamento del sistema. La termodinamica classica si occupa dei sistemi all'equilibrio, analizza i sistemi prima e dopo le trasformazioni. Le trasformazioni vengono considerate quasi statiche, cioè trasformazioni che passano attraverso infiniti stati di equilibrio in un tempo infinitamente lungo. Queste trasformazioni sono dette anche reversibili.

Spesso vengono considerati l'equilibrio meccanico (nessun lavoro da e

sul sistema), chimico (nessuna reazione chimica interna), termico (nessuno scambio di calore).

8.1 Principio zero della termodinamica

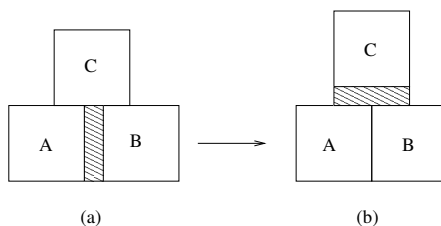


Figura 8.1: (a) A e B scambiano calore con C, raggiungono l'equilibrio. (b) A e B non scambiano calore, sono all'equilibrio

Il principio zero della termodinamica serve per definire il concetto di temperatura:

Principio 8.1 (principio zero della termodinamica) *Se due sistemi sono all'equilibrio termico con un terzo sistema allora sono all'equilibrio termico tra di loro.*

Due sistemi hanno la stessa temperatura se sono in equilibrio termico. Due sistemi sono in equilibrio termico se messi a contatto le loro proprietà non cambiano.

8.2 Temperatura

Il termometro è lo strumento per la misurazione della temperatura T . Per fare un termometro scelgo una proprietà X che varia in funzione di T . Se X varia linearmente in funzione di T allora (in kelvin):

$$T(X) = 273.16 \frac{X}{X_{\text{triplo}}} \quad (8.1)$$

X_{triplo} è la misura di X al punto triplo dell'acqua (0.01°C). In questo modo la temperatura del punto triplo dell'acqua è di 273.16 K . Solitamente X è il volume, la resistenza elettrica, la fem in una termocoppia, la pressione di un gas perfetto a volume costante... I termometri empirici hanno problemi di non linearità e possono essere usati solo in piccoli intervalli dove si ritiene che il problema della non linearità possa essere trascurabile. Questi intervalli

sono tutti interni del punto triplo, in quanto al punto triplo dell'acqua per definizione tutti i termometri danno la stessa lettura. Il miglior termometro è quello a gas perfetto a volume costante.

8.2.1 Termometro a gas perfetto a volume costante

Il termometro a gas perfetto è formato da un bulbo contenente un gas (perfetto, vedi 8.5 a pag. 68) che viene messo a contatto con il corpo di cui si vuole misurare la temperatura. Il gas tenderà ad espandersi o a contrarsi, cioè a cambiare il suo volume ma questo è mantenuto costante da una colonna di mercurio contenuta in un manometro collegato al bulbo. In questo modo si mantiene il volume costante e si legge il valore di pressione. La pressione per mantenere il volume costante è variata alzando o abbassando il serbatoio di mercurio del manometro. La temperatura empirica sarà proporzionale alla variazione di pressione del gas.

8.3 Legge dei gas perfetti

Legge 8.1 (Avogadro(1811)) *Uguali moli di gas, alla stessa pressione e temperatura contengono lo stesso numero N_A di molecole, detto numero di Avogadro.*

Legge 8.2 (Boyle)

$$p \propto \frac{1}{V} \quad (8.2)$$

Legge 8.3 (Gay Lussac)

$$p \propto T \quad (8.3)$$

Il tutto si riassume nell'equazione dei gas perfetti:

$$pV = nRT = \frac{N}{N_A}RT = N\frac{R}{N_A}T = NkT \quad (8.4)$$

con R costante dei gas, k costante di Boltzman.

8.4 Dilatazione termica

8.4.1 Dilatazione termica dei solidi

lineare

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T \quad (8.5)$$

α dipendente dal tipo di materiale non è costante nella temperatura, ma spesso lo si può considerare tale. Altrimenti:

$$\Delta L = \int_{T_1}^{T_2} \alpha(T) L_0 dT \quad (8.6)$$

Il coefficiente α è spesso isotropo, cioè uguali in tutte le direzioni. Quindi sviluppando con Taylor:

$$\Delta V = 3\alpha V_0 \Delta T \quad (8.7)$$

8.4.2 Dilatazione termica dei liquidi

Nei liquidi non si può parlare di dilatazione lineare, quindi

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T \quad (8.8)$$

β è abbastanza indipendente dalla temperatura, nei gas no, e si ricava dall'equazione dei gas perfetti.

8.5 Teoria cinetica del gas perfetto

Un gas perfetto è una idealizzazione semplificativa, ma spesso adatta a descrivere gas reali (e non solo). Le ipotesi idealizzanti sono:

1. Il gas perfetto consiste di corpuscoli materiali, tutti uguali, in moto casuale e soggetti alle leggi del moto di Newton. Si può trattare sia di atomi singoli, sia di gruppi di atomi. In entrambi i casi li chiameremo molecole. Sono animate da moto in qualsiasi direzione e velocità comprese in un ampio intervallo.
2. Il numero totale di molecole è straordinariamente grande. In questo modo si può applicare con ottimi risultati la statistica.
3. La somma dei volumi occupati da tutte le molecole è trascurabile rispetto al volume occupato dal gas.
4. Se escludiamo gli effetti degli urti, sia tra molecole sia con le pareti, le molecole non sono soggette ad alcun'altra forza, in particolare non si considerano le forze intermolecolari.
5. Gli urti sono perfettamente elastici e di durata trascurabile, quindi l'energia cinetica del sistema è costante. La durata trascurabile impone che l'energia potenziale totale delle molecole sia trascurabile.

8.5.1 Pressione

Consideriamo N molecole di un gas perfetto in un cubo di spigolo L . Prendiamo il punto di vista di una parete A_1 . Una particella di velocità \vec{v} e massa m urta A_1 :

$$\Delta p_x = -2mv_x \quad (8.9)$$

è la variazione della quantità di moto nella direzione x , ortogonale ad A_1 , della particella. Il tempo per andare e tornare è:

$$\Delta t = \frac{2L}{v_x} \quad (8.10)$$

quindi ogni Δt ci sarà un urto; per l'impulso

$$F_x \frac{2L}{v_x} = F_x \Delta t = \Delta p_x = -2mv_x$$

$$F_x = -\frac{mv_x^2}{L} \quad (8.11)$$

è la forza media (nel tempo) che applica la parete del recipiente sulla particella. Per il terzo principio della dinamica la particella sulla parete esercita una forza uguale e contraria, chiamiamola ancora \vec{F} cambiando ora punto di vista, quello della particella:

$$F_x = \frac{mv_x^2}{L} \quad (8.12)$$

La pressione P_1 su quella parete della particella è $\frac{\vec{F} \cdot \vec{n}}{A} = \frac{F_x}{A}$:

$$P_1 = \frac{mv_x^2}{L^3} = \frac{mv_x^2}{V} \quad (8.13)$$

Consideriamo ora il sistema di N particelle, con velocità \vec{v}_i , la media dei quadrati delle velocità lungo x è:

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_{x_i}^2 \quad (8.14)$$

analogamente per le altre componenti, che si sommano per dare $\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$. Lo spazio è isotropo, quindi

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2} \quad (8.15)$$

La pressione media (facendo la media tra tutte le particelle) esercitata da una particella sulla parete A_1 è:

$$\overline{P_{1i}} = \frac{\sum P_{1i}}{N} = \frac{\sum mv_{xi}^2}{NV} = \frac{m\overline{v_x^2}}{V}$$

Tutte le molecole eserciteranno una pressione media (facendo la media nel tempo) sulla parete A_1 :

$$\overline{P_x} = \frac{Nm\overline{v_x^2}}{V} = \frac{1}{3} \frac{Nm\overline{v^2}}{V} \quad (8.16)$$

Il numero di molecole è così straordinariamente grande che la pressione sulla nostra parete non varia nel tempo, quindi $\overline{P} = P$, allora:

$$P_x V = \frac{1}{3} Nm\overline{v^2}$$

Ma la pressione è uguale su tutte le pareti, quindi:

$$PV = \frac{1}{3} mN\overline{v^2} = \frac{1}{3} M\overline{v^2} \quad (8.17)$$

avendo introdotto $M = Nm$ la massa totale del gas. Introducendo la densità volumetrica $\rho = \frac{M}{V}$ la pressione:

$$P = \frac{1}{3} \rho \overline{v^2} \quad (8.18)$$

Usando invece l'energia cinetica del gas $K = \frac{1}{2} Nm\overline{v^2}$ la (8.17) diventa:

$$PV = \frac{2}{3} K \quad (8.19)$$

Definizione 8.1 (velocità quadratica media)

$$v_{qm} = \sqrt{\overline{v^2}} \quad (8.20)$$

Dalla (8.18) si ricava:

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}} \quad (8.21)$$

8.5.2 Libero cammino medio

Il libero cammino medio λ è lo spazio medio in cui una particella non subisce urti con altre particelle. Supponiamo di avere molecole di diametro d . Avviene una interazione solo se i due centri delle molecole si avvicinano a una distanza inferiore a d . Si può pensare anche che la molecola considerata abbia diametro $2d$ e le altre siano puntiformi. Nel tempo t la molecola spazza il volume di un cilindro di sezione πd^2 e di lunghezza $L_{cil} = vt$ con v velocità della molecola. Supponiamo che il gas sia racchiuso in un volume V contenga N molecole. Il numero di molecole contenuto nel cilindro è quindi:

$$N_{cil} = N \frac{V_{cil}}{V} = N \frac{\pi d^2 vt}{V}$$

Questo rappresenta anche il numero medio di urti nel tempo t della molecola. Ad ogni urto la molecola cambia direzione, ma spazza sempre il volume di un cilindro analogo.

Il libero cammino medio è la distanza totale percorsa diviso il numero di urti subiti:

$$\lambda = \frac{L_{cil}}{N_{cil}} = vt \frac{V}{N \pi d^2 vt} = \frac{V}{N \pi d^2}$$

Essendo $PV = NkT \Rightarrow V/N = kT/p$

$$\lambda = \frac{kT}{\pi d^2 p}$$

L'equazione è stata ricavata pensando che le molecole siano bersagli fermi. Le velocità semplificate non sono le stesse. Quella al numeratore è \bar{v} la velocità molecolare media misurata rispetto al recipiente che contiene il gas. Quella al denominatore rappresenta la velocità relativa media v_{rel} rispetto alle altre molecole. Si può dimostrare che $v_{rel} = \bar{v}\sqrt{2}$ e quindi:

$$\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$$

Bisogna tenere anche conto che al di sotto di una certa pressione il libero cammino medio eccede le dimensioni del contenitore e il concetto stesso di libero cammino medio perde di significato.

8.5.3 Distribuzione delle velocità

Distribuzione di Maxwell delle velocità:

$$N(v) = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad (8.22)$$

con m massa di una molecola, $M = N_A m$ massa molare. $N(v)dv$ = numero di molecole con velocità compresa tra v e $v + dv$, la velocità può essere solo positiva. Il numero totale di molecole:

$$N = \int_0^{\infty} N(v)dv \quad (8.23)$$

Al crescere della temperatura la velocità media delle molecole aumenta e la curva si allarga; essendo il numero delle molecole costante, anche l'area lo è e quindi la curva si appiattisce.

Velocità più probabile

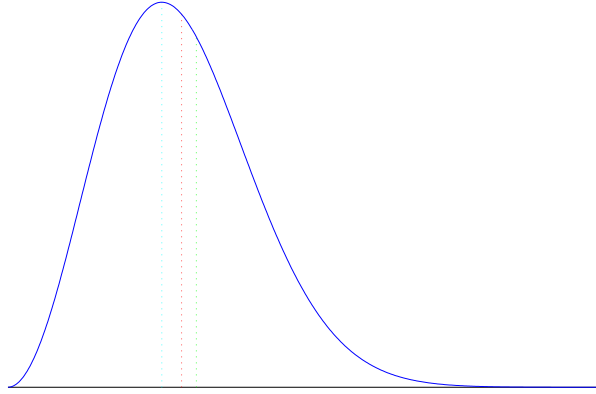


Figura 8.2: Distribuzione di Maxwell; velocità più probabile(blu), velocità media(rossa), velocità quadratica media(verde)

La velocità più probabile è quella in corrispondenza della quale la distribuzione ha un massimo, quindi:

$$\begin{aligned} 4\pi N \frac{d}{dv} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} &= 0 \\ 2ve^{-\frac{mv^2}{2kT}} - \frac{v^3 m}{kT} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} &= 0 \\ e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v \left(2 - v^2 \frac{m}{kT} \right) &= 0 \\ v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} &\quad (8.24) \end{aligned}$$

Velocità media

$$\bar{v} = \int_0^\infty v N(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad (8.25)$$

Velocità quadratica media

$$\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 N(v) dv = \frac{3kT}{m} \quad (8.26)$$

$$v_{\text{qm}} = \sqrt{\overline{v^2}}$$

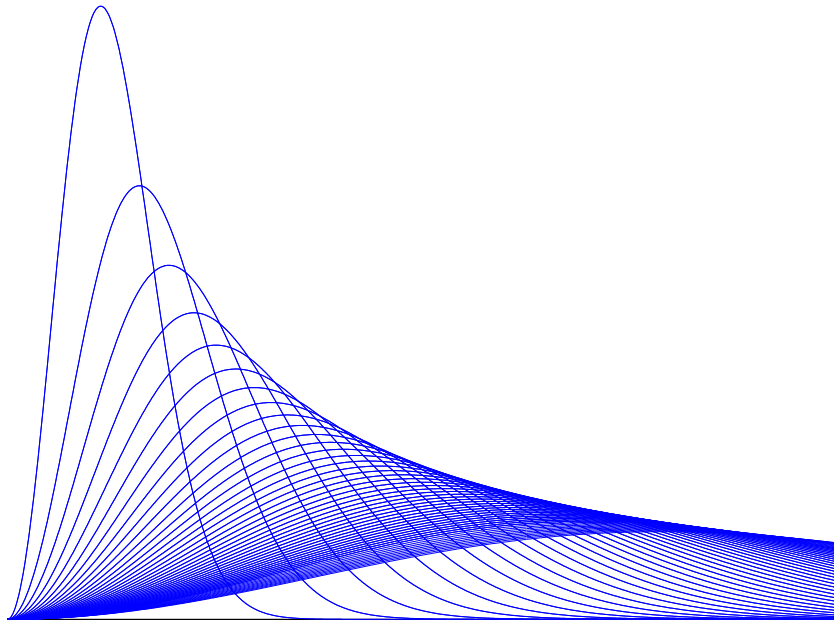


Figura 8.3: Famiglia di distribuzioni di Maxwell disegnate a intervalli costanti di temperatura

8.5.4 Distribuzione dell'energia

Una molecola monoatomica di una gas ha solo energia cinetica $E = \frac{1}{2}mv^2$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}E}$$

Il numero di molecole che ha una certa velocità è uguale al numero di molecole che ha una certa energia:

$$N(E)dE = N(v)dv$$

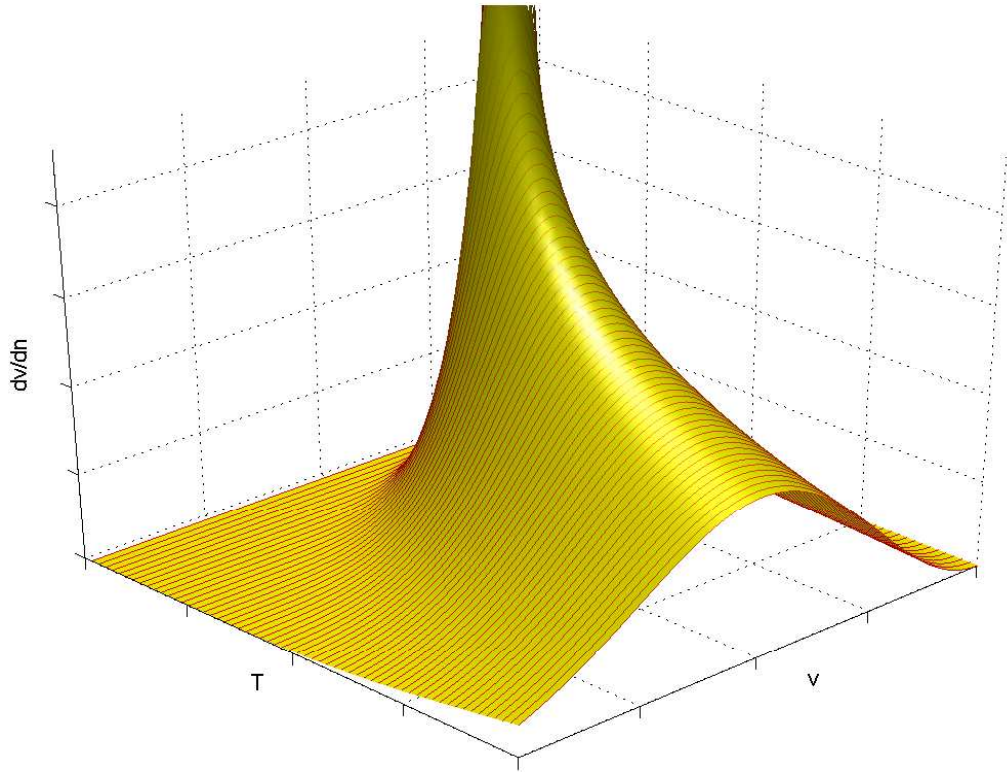


Figura 8.4: Andamento delle distribuzioni di Maxwell in funzione della temperatura

$$N(E) = N(v) \frac{dv}{dE} = N(v) \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{1}{2} E^{-\frac{1}{2}}$$

Distribuzione Maxwell-Boltzmann dell'energia:

$$N(E) = \frac{2N}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(kT)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}} \quad (8.27)$$

è indipendente dalla massa delle molecole, infatti un aumento di m consegue una diminuzione di v^2 in modo che l'energia cinetica rimanga invariata.

Energia media

Per un gas monoatomico

$$\overline{E} = \int_0^{\infty} E N(E) dE = \frac{3}{2} kT \quad (8.28)$$

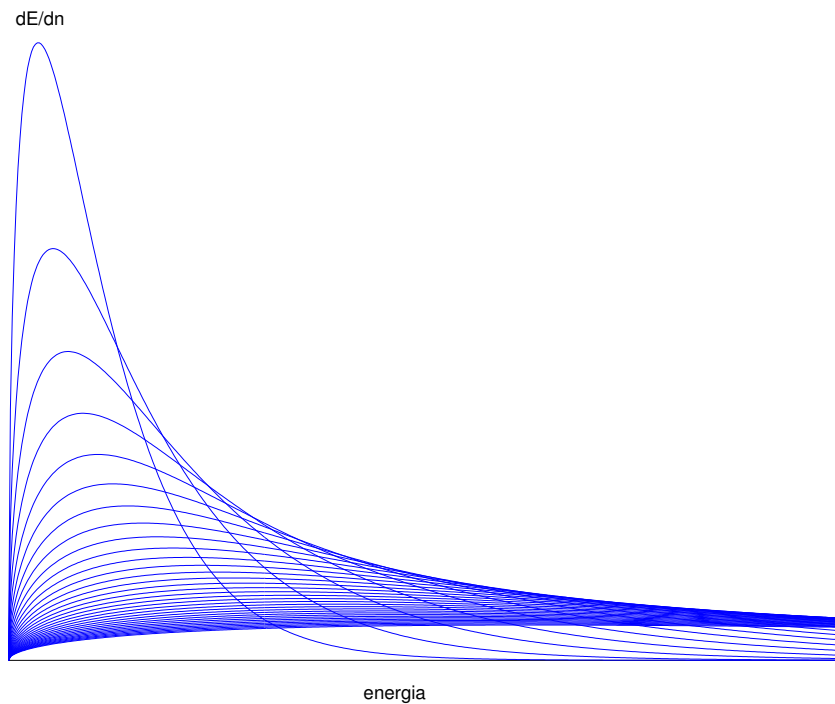


Figura 8.5: Famiglia di distribuzioni di energia disegnate a intervalli costati di temperatura

Per gli altri gas: f numero di gradi di libertà

$$\overline{E} = \frac{f}{2} kT \quad (8.29)$$

8.5.5 Riassunto teoria cinetica dei gas perfetti

massa molare	$M = N_A m$
pressione	$p = \frac{1}{3} \rho \overline{v^2}$
velocità quadratica media	$v_{qm} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$
velocità più probabile	$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$
velocità media	$\overline{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$
libero cammino medio	$\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p}$
energia cinetica traslazionale per molecola monoatomica	$K = \frac{3}{2} kT$

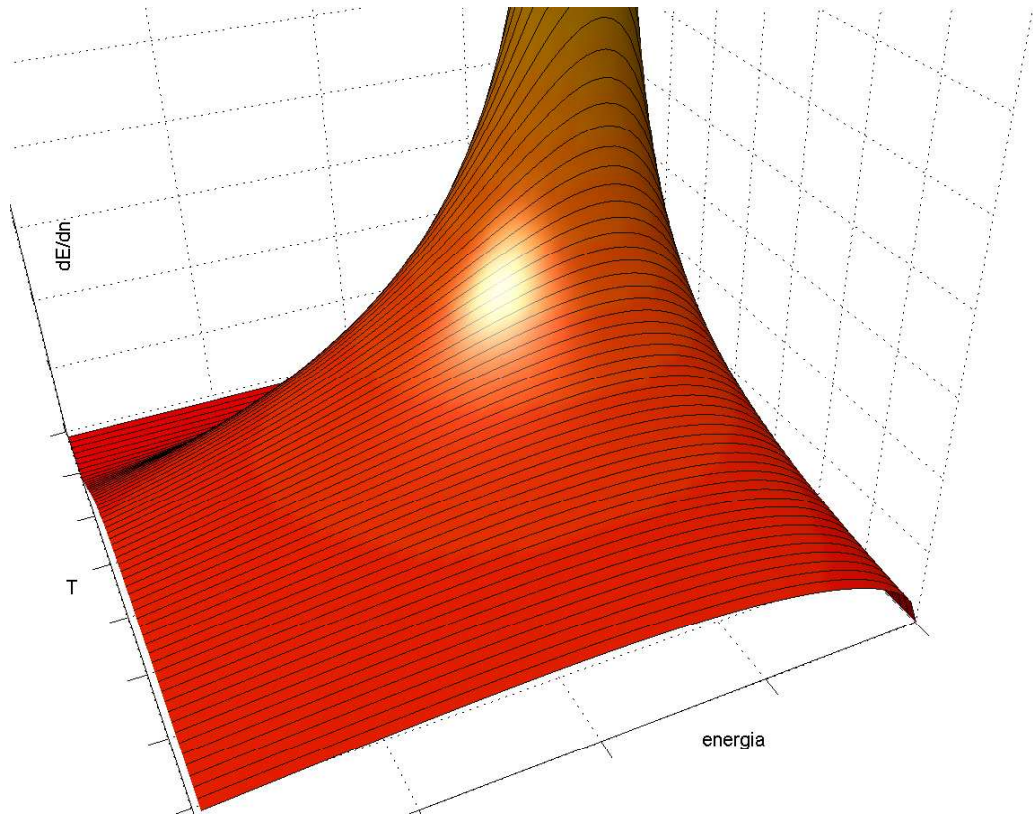


Figura 8.6: Andamento delle distribuzioni dell'energia in funzione della temperatura

8.6 Trasferimenti di calore

8.6.1 Irraggiamento

Ogni corpo emette radiazione elettromagnetica che dipende dalla temperatura. Leggi del corpo nero:

$$P = \sigma T^4 \quad \lambda_{\max} \sim \frac{1}{T} \quad (8.30)$$

8.6.2 Conduzione

Trasporto di calore senza trasporto di materia, è caratteristico dei solidi.

$$P = \frac{Q}{\Delta t} = K \frac{A}{\Delta x} \Delta T \quad (8.31)$$

con K coefficiente di conducibilità termica, A l'area effettiva di contatto, Δx lo spessore separatore.

8.6.3 Convezione

Trasporto di calore con trasporto di materia, cioè con correnti convettive in movimento.

8.7 Capacità termiche

Definizione 8.2 (capacità termica) Definiamo la capacità termica C di un corpo la quantità di calore necessaria per far aumentare la sua temperatura di ΔT

$$C = \frac{Q}{\Delta T} \quad (8.32)$$

Definizione 8.3 (capacità termica specifica) Definiamo la capacità termica specifica di una sostanza la quantità di calore necessaria per far aumentare temperatura di ΔT di un'unità di massa.

$$c = \frac{Q}{m\Delta T} = \frac{C}{m} \quad (8.33)$$

Esse non sono costanti, dipendono spesso dalla temperatura e dal tipo di trasformazione. Quindi al posto di $Q = mc\Delta T$ bisognerebbe scrivere:

$$Q = m \int_{T_0}^{T_f} c(T) dT \quad (8.34)$$

conoscendo però come varia c in funzione di T . Essendo c variabile dal tipo di trasformazione per i gas si parla di c_V calore specifico a volume costante e c_p calore specifico a pressione costante.

Definizione 8.4 (calore specifico molare) Il calore specifico molare è definito come:

$$c^{\text{mol}} = \frac{Q}{\Delta T n} = \frac{Q}{\Delta T} \frac{M}{m} = cM \quad (8.35)$$

con $M = \frac{m}{n}$ massa molare, n numero di moli. Spesso c^{mol} è indicato semplicemente con c .

Dulong e Petit osservarono che il calore specifico molare o capacità termica molare è uguale per tutti i solidi è circa 25 J/mol K. In realtà questo è il valore limite a cui tendono i solidi per temperature alte. Per temperature tendenti allo zero assoluto la capacità termica molare dei solidi tende a zero.

8.8 Energia interna

L'energia interna di un gas perfetto è data solo dall'energia cinetica in quanto si è supposto che non ci sia energia potenziale. Per una molecola monoatomica $K = \frac{3}{2}kT$, per n moli $E = K_n = nN_A \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}nRT$. Le molecole non puntiformi hanno anche energia cinetica rotazionale. Una molecola che possa ruotare su tutti i tre assi ha energia interna:

$$E = K = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 + \frac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \frac{1}{2}I_z\omega_z^2$$

La molecola ha quindi 6 gradi di libertà, 3 traslatori e 3 rotazionali. Una molecola monoatomica ha solo 3 gradi traslatori e nessuno rotazionale in quanto essendo puntiforme $I = 0$, una molecola biatomica ha 5 gradi di libertà.

8.8.1 Principio di equipartizione dell'energia

Il principio di equipartizione dell'energia di Maxwell dice che mediamente l'energia si ripartisce in modo equo tra i gradi di libertà. Ogni grado di libertà riceve $\frac{1}{2}kT$ di energia.

Principio 8.2 (equipartizione dell'energia)

$$E = \frac{f}{2}nRT \quad (8.36)$$

con f il numero di gradi di libertà delle particelle.

Si deduce che l'energia interna di un gas dipende esclusivamente dalla temperatura.

8.8.2 Calore specifico molare dei solidi

Gli atomi dei solidi sono disposti secondo strutture reticolari e possono vibrare intorno alle loro posizioni di equilibrio in tre direzioni. Ogni atomo dispone anche di energia potenziale, quindi altri tre gradi di libertà. Avendo in totale 6 gradi di libertà dall'equazione (8.36) si ha:

$$E = 3nRT$$

Se forniamo Q calore al solido esso si trasformerà tutto in energia interna non compiendo il solido alcun lavoro:

$$Q = \Delta E = 3nR\Delta T = nc\Delta T$$

$$c = \frac{3nR\Delta T}{n\Delta T} = 3R \simeq 25 \text{ J/mol K}$$

come previsto da Doulong e Petit.

8.8.3 Calore specifico dei gas

Come dimostrato più avanti in una trasformazione isocora tutto il calore si trasforma in variazione di energia interna in quanto non si compie lavoro.

$$c_V = \frac{Q}{n\Delta T} = \frac{\Delta E}{n\Delta T} = \frac{\frac{f}{2}nR\Delta T}{n\Delta T} = \frac{f}{2}R$$

$$c_p = c_V + R \quad \text{vedi relazione di Mayer } 8.10.2 \text{ pag.81}$$

8.9 Primo principio della termodinamica

Consideriamo positivo qualsiasi cosa aumenti l'energia interna quindi consideriamo positivo il lavoro compiuto dall'ambiente sul sistema e positivo il calore ceduto dall'ambiente al sistema.

$$\Delta E = Q + L = E_f - E_i$$

con E_f , E_i l'energia interna del sistema finale ed iniziale; ΔE dipende solo dalla situazione finale ed iniziale del sistema (per un gas solo dalla temperatura), quindi è una funzione di stato, cioè una funzione che non dipende dalla particolare trasformazione, dal cammino percorso, ma solo dalle situazioni iniziali e finali. Mentre L e Q non sono funzioni di stato, la loro somma lo è. Questo è il primo principio della termodinamica:

Principio 8.3 (primo principio della termodinamica)

$$Q + L = \Delta E \tag{8.37a}$$

considerando variazioni infinitesime diventa:

$$\delta Q + \delta L = dE \tag{8.37b}$$

dE è un differenziale esatto essendo E una funzione di stato.

8.10 Trasformazioni di un gas

Le trasformazioni le possiamo dividere in due gruppi:

- trasformazioni irreversibili: sono veloci, non sono determinate negli stati intermedi.
- trasformazioni quasistatiche: sono lente, si dà il tempo al sistema di reagire attraversando infiniti stati di equilibrio intermedi. Una trasformazione quasi statica molto lenta idealizza una trasformazione reversibile, cioè una trasformazione che può tornare allo stato di partenza.

8.10.1 Calcolo del lavoro

Caso generale

Considerando una trasformazione reversibile e un gas perfetto:

$$\delta L = -F dx = -p A dx = -p dV$$

$$L = - \int_{V_0}^{V_f} p dV \quad (8.38)$$

Il modulo del lavoro è dunque, considerando il significato geometrico dell'integrale definito, l'area sottesa dalla curva $p = p(V)$. Il meno nella formula (8.38) deriva dal fatto che considerando positivo il lavoro dell'ambiente la forza (dell'ambiente sul sistema) comprime il sistema, per esempio un contenitore con un pistone mobile, quindi lo spostamento è $-dx$, perché x diminuisce.

$$\begin{aligned} L < 0 &\Leftrightarrow \text{espansione} \\ L > 0 &\Leftrightarrow \text{compressione} \end{aligned}$$

Isobara $p = \text{const}$

$$L = - \int_{V_0}^{V_f} p dV = -p \Delta V \quad (8.39)$$

Isocora $V = \text{const}$

$$L = - \int_{V_0}^{V_f} p dV = 0 \quad (8.40)$$

Isoterma $T = \text{const}$

$$L = - \int_{V_0}^{V_f} p \, dV = - \int_{V_0}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV = -nRT \int_{V_0}^{V_f} \frac{dV}{V} = -nRT \log \frac{V_f}{V_0} \quad (8.41)$$

Adiabatica $Q = 0$

$$L = \Delta E \quad (8.42)$$

8.10.2 Relazione di Mayer

$$A \rightarrow B \quad V = \text{const} \quad \text{I}$$

$$A \rightarrow C \quad p = \text{const} \quad \text{II}$$

$$\Delta E_I = Q_I + L_I = Q_I = nc_V \Delta T$$

$$\Delta E_{II} = Q_{II} + L_{II} = nc_p \Delta T - p \Delta V$$

$E_B = E_C$ perché E dipende solo da T

$$\Delta E_I = \Delta E_{II}$$

$$nc_V \Delta T = nc_p \Delta T - p \Delta V$$

$$nc_V \Delta T = nc_p \Delta T - nR \Delta T$$

$$c_p - c_V = R \quad \text{Relazione di Mayer} \quad (8.43)$$

8.10.3 Adiabatiche

$$Q = 0 \quad dE = \delta Q + \delta L = \delta L = -p dV$$

per una isocora che lavora alle stesse temperature $dE = \delta Q = nc_V dT$

$$nc_V dT = -p dV = -\frac{nRT}{V} dV$$

$$c_V dT = -\frac{RT}{V} dV$$

$$\int_{T_i}^{T_f} \frac{c_V}{T} dT = - \int_{V_i}^{V_f} \frac{R}{V} dV$$

$$c_V \log \frac{T_f}{T_i} = -R \log \frac{V_f}{V_i}$$

$$\begin{aligned}
R &= c_p - c_V \quad \gamma = \frac{c_p}{c_V} > 1 \\
\log \frac{T_f}{T_i} &= \frac{c_V - c_p}{c_V} \log \frac{V_f}{V_i} = (1 - \gamma) \log \frac{V_f}{V_i} \\
\log \frac{T_f}{T_i} &= \log \left(\frac{V_f}{V_i} \right)^{(1-\gamma)} \\
\frac{T_f}{T_i} &= \left(\frac{V_f}{V_i} \right)^{(1-\gamma)} \quad T_f V_f^{\gamma-1} = T_i V_i^{\gamma-1} \\
TV^{\gamma-1} &= \text{const} \quad PVV^{\gamma-1} = \text{const}
\end{aligned}$$

$$PV^\gamma = \text{const} \quad \text{Relazione di Poisson} \quad (8.44)$$

8.10.4 Trasformazioni politropiche

Nelle trasformazioni politropiche c è ritenuto costante.

$$\begin{aligned}
dE &= \delta Q + \delta L = ncdT - pdV \\
\text{per una isocora} \quad dE &= nc_V dT \\
ncdT - pdV &= nc_V dT \\
ncdT - \frac{nRT}{V} dV &= nc_V dT \\
(c_V - c)dT &= -\frac{RT}{V} dV \quad \int_{T_0}^{T_f} \frac{c_V - c}{T} dT = - \int_{V_0}^{V_f} \frac{R}{V} dV \\
(c_V - c) \int_{T_0}^{T_f} \frac{dT}{T} &= -R \int_{V_0}^{V_f} \frac{dV}{V} \\
\int_{T_0}^{T_f} \frac{dT}{T} &= -\frac{c_p - c_V}{c_V - c} \int_{V_0}^{V_f} \frac{dV}{V} \\
\log \frac{T_f}{T_0} &= -\frac{c_p - c_V}{c_V - c} \log \frac{V_f}{V_0} = \frac{c_p - c_V}{c_V - c} \log \frac{V_0}{V_f} \\
(k - 1) &= \frac{c_p - c_V}{c_V - c} \\
\log \frac{T_f}{T_0} &= \log \left[\left(\frac{V_0}{V_f} \right)^{k-1} \right] \quad \frac{T_f}{T_0} = \left(\frac{V_0}{V_f} \right)^{k-1} \\
T_f V_f^{k-1} &= T_0 V_0^{k-1} \quad TV^{k-1} = \text{const}
\end{aligned}$$

$$PVV^{k-1} = (nR)\text{const} \quad PV^k = \text{const}$$

$$k = \frac{c_p - c}{c_V - c} \quad c = \frac{kc_V - c_p}{k - 1}$$

Tutte le trasformazioni come politropiche

Isoterma	$pV = \text{const}$	$k = 1$	$c = \infty$
Isocora	$V = \text{const}$	$k = \infty$	$c = c_V$
Isobara	$p = \text{const}$	$k = 0$	$c = c_p$
Adiabatica	$pV^\gamma = \text{const}$	$k = \gamma > 1$	$c = 0$

	L	Q	ΔE
Isoterma	$-nRT \log \frac{V_f}{V_0}$	$nRT \log \frac{V_f}{V_0}$	$0 = nc_V \Delta T$
Isocora	0	$nc_V \Delta T$	$nc_V \Delta T$
Isobara	$-p \Delta V$	$nc_p \Delta T$	$nc_V \Delta T$
Adiabatica	$nc_V \Delta T$	0	$nc_V \Delta T$

8.11 Trasformazioni cicliche

$$\Delta E = Q + L = 0 \quad (8.45)$$

La macchine termiche trasformano il calore in lavoro. I frigoriferi trasformano il lavoro in trasferimento di calore, dalla sorgente più fredda a quella più calda.

8.11.1 Ciclo di Carnot per un gas perfetto

1. Si porta il sistema alla temperatura T_1 immergendo in un bagno termico.
2. Il gas si espande da V_A a V_B seguendo una trasformazione isoterma.
3. Il gas si espande da V_B a V_C seguendo una trasformazione adiabatica.
4. Si porta il sistema alla temperatura T_2 immergendolo in un bagno termico.
5. Si comprime il gas da V_C a V_D seguendo una isoterma.
6. Si comprime il gas da V_D a V_A seguendo una adiabatica.

Nota: $Q_1 > 0$, $Q_2 < 0$, $L < 0$

$$Q = Q_1 - |Q_2| = -L$$

$$Q_2 = nRT \log \frac{V_D}{V_C}$$

$$T_1 V_B^{\gamma-1} = T_2 V_C^{\gamma-1}$$

$$T_1 V_A^{\gamma-1} = T_2 V_D^{\gamma-1}$$

$$\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} \quad \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

I calori stanno alle temperature.

Il rendimento η sarà maggiore quanto maggiore è il lavoro svolto dalla macchina sull'ambiente con minore scambio di calore.

$$\eta = \frac{|L|}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{nRT_2 \log \frac{V_C}{V_D}}{nRT_1 \log \frac{V_B}{V_A}} = 1 - \frac{T_2}{T_1} < 1$$

La condizione migliore è quella della macchina perfetta in cui tutto il calore è trasformato in lavoro, $\eta_{\text{perfetta}} = 1$

8.11.2 Frigorifero

Si esegue il ciclo di Carnot al contrario. Si fornisce quindi lavoro e si ha un trasferimento di calore, trasferendolo dalla sorgente fredda a quella più calda. Il coefficiente di merito sarà maggiore quando è maggiore il calore trasferito e minore il lavoro necessario. Nota: $Q_1 < 0$, $Q_2 > 0$, $L > 0$

$$0 = L + Q = L + Q_2 - |Q_1|$$

$$L = |Q_1| - Q_2 \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$\eta = \frac{Q_2}{L} = \frac{Q_2}{|Q_1| - Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} > 0$$

Il frigorifero perfetto trasferisce calore dalla sorgente più fredda a quella più calda senza bisogno di lavoro, quindi $\eta \rightarrow \infty$

8.11.3 Ciclo Otto

Il ciclo Otto approssima molto il ciclo di un motore a benzina a quattro tempi.

OA=aspirazione miscela

AB=compressione adiabatca

BC=accensione

CD=espansione adiabatca

DA=raffreddamento

OA=espulsione gas combusti

$$Q_{BC} = nc_V \Delta T = nc_V (T_C - T_B) > 0$$

$$Q_{DA} = nc_V \Delta T = nc_V (T_A - T_D) < 0$$

$$L + Q_{BC} - |Q_{DA}| = 0 \quad L = |Q_{DA}| - Q_{BC} < 0 \quad |L| = Q_{BC} - |Q_{DA}|$$

$$\eta = \frac{|L|}{Q_{BC}} = \frac{Q_{BC} - |Q_{DA}|}{Q_{BC}} = 1 - \frac{|Q_{DA}|}{Q_{BC}} = 1 - \frac{nc_V (T_D - T_A)}{nc_V (T_C - T_B)} = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}$$

Spesso il rendimento viene espresso in funzione del rapporto di compressione $r = \frac{V_2}{V_1}$

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}$$

$$\begin{cases} T_C V_1^{\gamma-1} = T_D V_2^{\gamma-1} \\ T_B V_1^{\gamma-1} = T_A V_2^{\gamma-1} \end{cases}$$

$$(T_C - T_B) V_1^{\gamma-1} = (T_D - T_A) V_2^{\gamma-1}$$

$$\frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}$$

$$\eta = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = 1 - \left(\frac{1}{r} \right)^{\gamma-1}$$

Più grande è r più è grande η . Se r è troppo grande ΔV è grande e nella compressione si crea troppo calore che provoca la preaccensione. Tipicamente $r = 5$, quindi $\eta = 0.55$. In realtà con questo rapporto di compressione nella macchine reali si ha $\eta = 0.3$.

8.11.4 Diagrammi di flusso

I diagrammi di flusso sono degli schemi utili per descrivere le trasformazioni cicliche. I piani orizzontali rappresentano le fonti di calore a diversa temperatura, la sezione del tubo varia a seconda dell'energia interna del sistema.

8.12 Secondo principio della termodinamica

Principio 8.4 (Enunciato di Kelvin) *è impossibile realizzare una trasformazione il cui unico scopo è di produrre lavoro da una sola sorgente di calore.*

Principio 8.5 (Enunciato di Clausius) *è impossibile realizzare una trasformazione il cui unico scopo sia quello di fare passare calore da una sorgente di bassa temperatura ad una più alta.*

Una isoterma sembra violare Kelvin, in realtà trasforma tutto il calore in lavoro, ma non fa solo quello, infatti espande il gas.

8.12.1 Kelvin \Leftrightarrow Clausius

Chiamiamo \overline{K} antikelvin un ciclo che viola Kelvin e \overline{C} anticlausius un ciclo che viola Clausius. Dimostriamo che $(\exists \overline{K} \Rightarrow \exists \overline{C}) \wedge (\exists \overline{C} \Rightarrow \exists \overline{K})$. Sommiamo un antikelvin con un frigorifero e otteniamo un anticlausius (Figura 8.10). Sommiamo un anticlausius e una macchina termica e otteniamo un antikelvin (Figura 8.11).

8.12.2 Teorema di Carnot

Teorema 8.1 (Carnot: il più bravo sono io) *a parità di temperature non esiste macchina con rendimento migliore di quella di Carnot: $\eta_M \leq \eta_C$.*

Dimostrazione caso con due sorgenti

Per assurdo: $\exists M : \eta_M > \eta_C$. Con la macchina di Carnot posso variare a piacimento il lavoro tenendo fisso η allungando le isoterme. Scelgo una macchina di Carnot tale che $L_C = L_M$. Le macchine lavorano alle stesse temperature. La macchina M avendo maggior rendimento avrà bisogno di meno calore, infatti:

$$\eta_M = \frac{|L_M|}{Q_M} > \eta_C = \frac{|L_C|}{Q_C} = \frac{|L_M|}{Q_C}$$

$$\frac{|L_M|}{Q_M} > \frac{|L_M|}{Q_C} \quad Q_M < Q_C$$

Combino la macchina M con la macchina di Carnot fatta funzionare al contrario, trovo un antikelvin. Assurdo, quindi:

$$\eta_M \leq \eta_C$$

Corollario 8.1 *Se la macchina è reversibile $\eta_M = \eta_C$. Per assurdo $\eta_M < \eta_C$, $M^{-1} + C = \overline{C}$, assurdo $\Rightarrow \eta_M \geq \eta_C \Rightarrow \eta_M = \eta_C$*

8.13 Entropia

Consideriamo una trasformazione reversibile per un gas perfetto:

$$\delta Q + \delta L = dE \quad \delta Q - p dV = n c_V dT$$

$$\delta Q = n c_V dT + p dV$$

$$\frac{\delta Q}{T} \text{ è un differenziale esatto?}$$

Per verificarlo integriamo la quantità e vediamo se si può esprimere come differenza di funzioni che dipendono solo dallo stato iniziale e finale del sistema e non dalla particolare trasformazione. L'integrale quindi sarà una funzione di stato.

$$\begin{aligned} \int_i^f \frac{\delta Q}{T} &= \int_i^f \frac{n c_V dT + p dV}{T} = \int_{T_i}^{T_f} \frac{n c_V dT}{T} + \int_{V_i}^{V_f} \frac{p dV}{T} \\ &= n c_V \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} + \int_{V_i}^{V_f} \frac{\frac{nRT}{V} dV}{T} = n c_V \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} + nR \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} \\ &= (n c_V \log T_f + nR \log V_f) - (n c_V \log T_i + nR \log V_i) = S(f) - S(i) \\ &= \Delta S \end{aligned}$$

$$S = n c_V \log T + nR \log V + \text{const} = \text{entropia}$$

$$\int_i^f \frac{\delta Q}{T} = \Delta S \quad \oint \frac{\delta Q}{T} = 0$$

L'entropia è una funzione di stato.

Isocora

$$\Delta S = n c_V \log \frac{T_f}{T_i} + nR \log \frac{V_f}{V_0} = n c_V \log \frac{T_f}{T_i}$$

Isobara

$$\frac{V_i}{V_f} = \frac{T_i}{T_f}$$

$$\begin{aligned}\Delta S &= nc_V \log \frac{T_f}{T_i} + nR \log \frac{V_f}{V_i} = nc_V \log \frac{T_f}{T_i} + nR \log \frac{T_f}{T_i} \\ &= \log \frac{T_f}{T_i} (c_V + R) = nc_p \log \frac{T_f}{T_i}\end{aligned}$$

Adiabatica

$$\delta Q = 0 \Rightarrow \Delta S = 0$$

Le adiabatiche vengono anche chiamate trasformazioni isoentropiche

Isoterma

$$\Delta S = nc_V \log \frac{T_f}{T_i} + nR \log \frac{V_f}{V_0} = nR \log \frac{V_f}{V_0} = \frac{Q}{T}$$

Espansione libera

L'espansione libera è una adiabatica irreversibile, quindi non si può concludere che $\Delta S = 0$. Lo stato iniziale e quello finale sono alla stessa temperatura, quindi si trovano sulla stessa isoterma. La trasformazione pur non essendo isoterma ha ΔS di una isoterma. Se il volume finale è il doppio di quello iniziale:

$$\Delta S = nR \log \frac{V_f}{V_i} = nR \log 2$$

8.13.1 Entropia nei cicli

Consideriamo una macchina M generica, assorbe da N sorgenti di calore a temperature diverse T_i calore $Q_i > 0$. La sorgente 0 a temperatura T_0 non ha nulla a che fare con la macchina M .

Costruiamo delle macchine di Carnot C_i che lavorano ciascuna tra le temperature $T_i \div T_0$

$$\frac{Q_i}{Q_{i,0}} = -\frac{T_i}{T_0} \quad Q_{i,0} = -\frac{T_0 Q_i}{T_i}$$

$$H = \text{macchina infernale} = M + \sum_{i=1}^N C_i^{-1}$$

$Q_{H,0} = 0$. H usa solo la sorgente a T_0 , quindi non può produrre lavoro:

$$L_H \geq 0 \quad Q_H = -L_H \leq 0 \quad Q_{i,0} := -Q_{i,0} = \frac{T_0 Q_i}{T_i} \quad \text{perché } C^{-1}$$

$$Q_0^{C^{-1}} = \sum Q_{i,0}^{C^{-1}} = T_0 \sum \frac{Q_i}{T_i}$$

$$Q_H = Q_0^{C^{-1}} = T_0 \sum \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \quad \sum \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

passando a variabili continue:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \quad \text{diseguaglianza di Clausius} \quad (8.46)$$

la disequazione vale per qualsiasi gas, per qualsiasi trasformazione.

Se M reversibile costruisco $H' = M^{-1} + \sum_{i=1}^N C_i$, Q è cambiato di segno, quindi la disequaglianza diventa:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \geq 0$$

Confrontando questa disequaglianza con quella di Clausius (8.46) si conclude che per una macchina reversibile:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0 \quad (8.47)$$

Infatti considerando trasformazioni reversibili ΔS è una funzione di stato:

$$\int_i^f \frac{\delta Q}{T} = S(f) - S(i) \quad \oint \frac{\delta Q}{T} = \int_A^A \frac{\delta Q}{T} = S(A) - S(A) = 0$$

8.13.2 Entropia per qualsiasi trasformazione

Considerando un ciclo con trasformazioni irreversibili:

$$\begin{aligned} \oint \frac{\delta Q}{T} &\leq 0 \\ \underbrace{\int_i^f \frac{\delta Q}{T}}_{\text{irreversibile}} - \underbrace{\int_i^f \frac{\delta Q}{T}}_{\text{reversibile}} &\leq 0 \\ \underbrace{\int_i^f \frac{\delta Q}{T}}_{\text{irreversibile}} &\leq \underbrace{\int_i^f \frac{\delta Q}{T}}_{\text{reversibile}} = \Delta S \end{aligned}$$

Per una trasformazione qualsiasi (anche irreversibile):

$$\Delta S \geq \int_i^f \frac{\delta Q}{T}$$

Nel caso sia reversibile vale l'uguaglianza.

8.13.3 Entropia e secondo principio

$$\Delta S \geq \int_i^f \frac{\delta Q}{T}$$

se consideriamo un sistema isolato $\delta Q = 0$ quindi

$$\Delta S \geq 0$$

Se avvengono solo trasformazioni reversibili $\Delta S = 0$ quindi l'entropia dell'universo non può diminuire. Le trasformazioni reversibili si dice che non lasciano traccia entropica. L'aumento dell'entropia è equivalente al secondo principio (enunciato di Kelvin o di Clausius):

Macchina perfetta

$$\Delta S_{\text{sistema}} = 0 \quad \text{perché ciclo}$$

$$\Delta S_{\text{universo}} = \Delta S_{\text{sistema}} + \Delta S_{\text{sorgente}}$$

$$\Delta S_{\text{universo}} = \Delta S_{\text{sorgente}} = \frac{Q_1}{T_1} < 0$$

$$\Delta S < 0 \quad \text{impossibile}$$

Q_1 è negativo perché lo si deve considerare dal punto di vista della sorgente per calcolare la variazione di entropia della sorgente.

Frigorifero perfetto

$$|Q_1| = |Q_2| = Q$$

$$\Delta S_{\text{universo}} = \Delta S_{\text{sistema}} + \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{|Q|}{T_1} - \frac{|Q|}{T_2} = |Q| \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) < 0$$

$$\Delta S < 0 \quad \text{impossibile}$$

questo perché $T_1 > T_2$; se fosse $T_2 > T_1$ cioè il calore circolasse dalla sorgente calda a quella fredda $\Delta S \geq 0$ e non ci sarebbe nulla di assurdo.

Secondo principio

$$\Delta S_{\text{sistema isolato}} \geq 0$$

L'uguaglianza solo per trasformazioni reversibili.

8.13.4 Interpretazione statistica dell'entropia

Nell'espansione libera (o di Joule¹) si verifica sperimentalmente che la temperatura non varia. Essa è una trasformazione irreversibile spontanea. È isolata dall'ambiente essendo le pareti adiabatiche. Le pareti sono indeformabili, non viene compiuto lavoro. $\Delta S_{\text{ambiente}} = 0$ $V_f = 2V_i$

$$\Delta S_{\text{universo}} = \Delta S_{\text{sistema}} + \Delta S_{\text{ambiente}} = nR \log \frac{V_f}{V_i} = nR \log 2 > 0$$

P = numero di microstati che danno luogo ad uno stato termodinamico

P è la probabilità che il sistema si configuri in un dato stato termodinamico a meno di un coefficiente, chiamata anche molteplicità.

S è una variabile termodinamica estensiva, quindi per calcolare l'entropia del sistema si somma S_1 della parte sinistra e S_2 della parte destra. Le variabili termodinamiche come T , p sono intensive e sommarle in questo caso non ha senso.

Legge 8.4 (legge di Boltzman) *Entropia secondo Boltzman:*

$$S = k \log P \quad (8.48)$$

Diciamo che due configurazioni sono equivalenti se presentano lo stesso numero di particelle a destra e lo stesso numero di particelle a sinistra. L'equivalenza è logica in quanto le particelle sono indistinguibili. $P = \binom{N}{n}$ per ogni classe di equivalenza, avendo $N = 6$ particelle totali:

N_S	N_D	P
6	0	1
5	1	6
4	2	15
3	3	20
2	4	15
1	5	6
0	6	1

¹si legge giul, non giul (è francese!)

Si nota che è più probabile osservare una configurazione in cui l'entropia è aumentata (3,3) che una dove l'entropia non è aumentata. Con questo approccio non si esclude l'ipotesi che l'entropia possa diminuire, ma è estremamente improbabile, soprattutto se si considera un numero di particelle estremamente più grande.

In generale lo stato più probabile è quello con $\frac{N}{2}$ particelle a destra e a sinistra, quindi:

$$P = \binom{N}{n} = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}\right)! \left(\frac{N}{2}\right)!} = \frac{N!}{\left[\left(\frac{N}{2}\right)!\right]^2}$$

Stearling: $\log n! \sim n \log n - n$

$$\begin{aligned} \log P &= \log N! - 2 \log \left(\frac{N}{2}! \right) \sim N \log N - N - 2 \left[\frac{N}{2} \log \frac{N}{2} - \frac{N}{2} \right] = \\ &= N \log N - N - N \log \frac{N}{2} + N = N \log N - N (\log N - \log 2) \\ &= N \log 2 \end{aligned}$$

$$S_f = k \log P = k N \log 2 = n R \log 2$$

la formula è identica a quella trovata a livello macroscopico considerando la variazione di entropia dell'espansione libera come la variazione dell'entropia di una isoterma.

Esempio 8.1 (Esempio ghiaccio) Ghiaccio a $T_G = 273.15$ K di massa m in acqua a $T_A = (273.15 + \varepsilon)$ K

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{acqua}} &= S_{\text{acqua}} - S_{\text{ghiaccio e acqua}} \\ &= \int_{\text{ghiaccio}}^{\text{acqua}} \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T_0} \int_{\text{ghiaccio}}^{\text{acqua}} \delta Q = \frac{Q}{T_0} = \frac{\lambda m}{T_0} > 0 \\ \Delta S_{\text{ghiaccio}} &= \frac{\lambda m}{T_0} \\ \Delta S_{\text{vasca}} &= -\frac{\lambda m}{T_0} \\ \Delta S_{\text{universo}} &= 0 \quad \text{perché reversibile} \end{aligned}$$

8.13.5 Grafici S/T

L'area sottesa un grafico p/V era il lavoro svolto durante la trasformazione. In un grafico S/T sarà:

$$\int_A^B T dS = \int_A^B \delta Q = Q$$

Ciclo di Carnot

$$\eta = \frac{|L|}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = \frac{\Delta S_1 T_1 - |\Delta S_2| T_2}{\Delta S_1 T_1} = \frac{\Delta S \Delta T}{\Delta S T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Nota che: $\Delta S_1 = -\Delta S_2$, ne segue che $\Delta S_{\text{macchina}} = 0$. Ma anche $\Delta S_{\text{sorgenti}} = 0$ perché $\frac{Q_1}{T_1} = -\frac{Q_2}{T_2}$, quindi $\Delta S_{\text{universo}} = 0$, infatti la trasformazione è reversibile.

L'espressione del rendimento è identica a quella trovata in precedenza.

8.13.6 Generalizzazione del principio di Carnot

Immaginiamo una macchina infernale che scambia calore con più sorgenti, con temperature comprese tra T_{max} e T_{min} .

$$\begin{aligned} \sum \frac{Q_i}{T_i} &= \sum \frac{Q_{a,i}}{T_i} - \sum \frac{|Q_{c,i}|}{T_i} \leq 0 \\ \sum \frac{Q_{a,i}}{T_{\text{max}}} &\leq \sum \frac{Q_{a,i}}{T_i} \leq \sum \frac{|Q_{c,i}|}{T_i} \leq \sum \frac{|Q_{c,i}|}{T_{\text{min}}} \\ \frac{\sum Q_{a,i}}{\sum |Q_{c,i}|} &\leq \frac{T_{\text{max}}}{T_{\text{min}}} \quad \frac{\sum |Q_{c,i}|}{\sum Q_{a,i}} \geq \frac{T_{\text{min}}}{T_{\text{max}}} \\ L + \sum Q_{a,i} - \sum |Q_{c,i}| &= 0 \quad |L| = -L = \sum Q_{a,i} - \sum |Q_{c,i}| \\ \eta_M = \frac{|L|}{Q_a} &= \frac{|L|}{\sum Q_{a,i}} = \frac{\sum Q_{a,i} - \sum |Q_{c,i}|}{\sum Q_{a,i}} = 1 - \frac{\sum |Q_{c,i}|}{\sum Q_{a,i}} \leq 1 - \frac{T_{\text{min}}}{T_{\text{max}}} = \eta_C \\ \eta_M &\leq \eta_C \end{aligned}$$

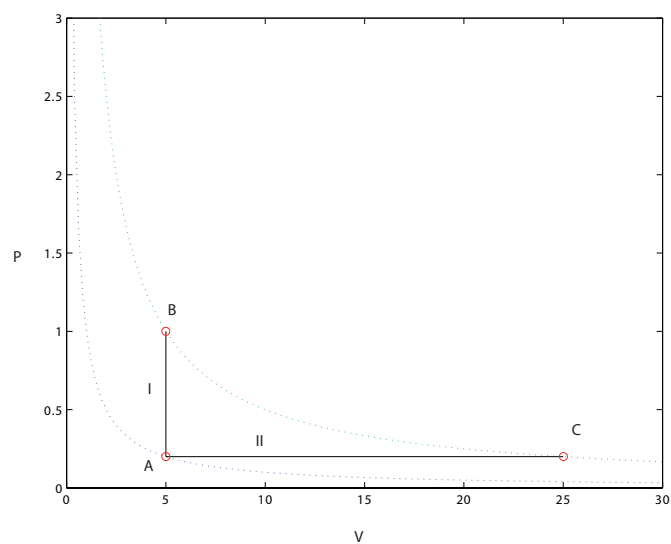
8.14 Scala termodinamica o assoluta

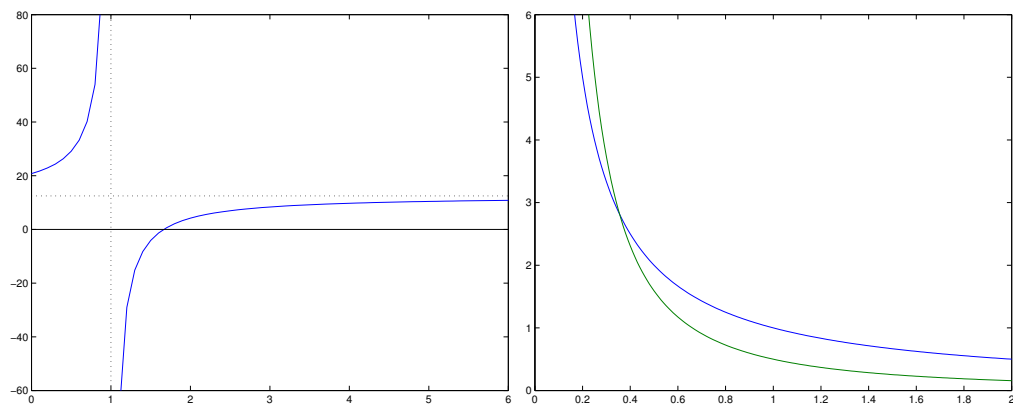
La scala di temperatura definita come quella del termometro a gas risulta limitata per temperature molto basse, al di sotto della quale (1 K) non esiste materia allo stato gassoso. Per questo motivo viene definita la scala termodinamica. Per qualsiasi macchina reversibile (anche per uno scarafaggio che gira):

$$\begin{aligned} \eta_{\text{rev}} = \eta_C &= 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} \\ \frac{\theta_2}{\theta_1} &= \frac{|Q_2|}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} \end{aligned}$$

8.15 Riassunto trasformazioni

	L	Q	ΔE	ΔS
Isoterma	$-nRT \log \frac{V_f}{V_0}$	$nRT \log \frac{V_f}{V_0}$	$0 = nc_V \Delta T$	$nR \log \frac{V_f}{V_i} = \frac{Q}{T}$
Isocora	0	$nc_V \Delta T$	$nc_V \Delta T$	$nc_V \log \frac{T_f}{T_i}$
Isobara	$-p \Delta V$	$nc_p \Delta T$	$nc_V \Delta T$	$nc_p \log \frac{T_f}{T_i}$
Adiabatica	$nc_V \Delta T$	0	$nc_V \Delta T$	0
Espansione libera	0	0	$0 = nc_V \Delta T$	$nR \log 2$





(a) c in funzione di k

(b) isoterma e adiabatiche in un grafico $p(V)$, quelle intermedie hanno $c < 0$

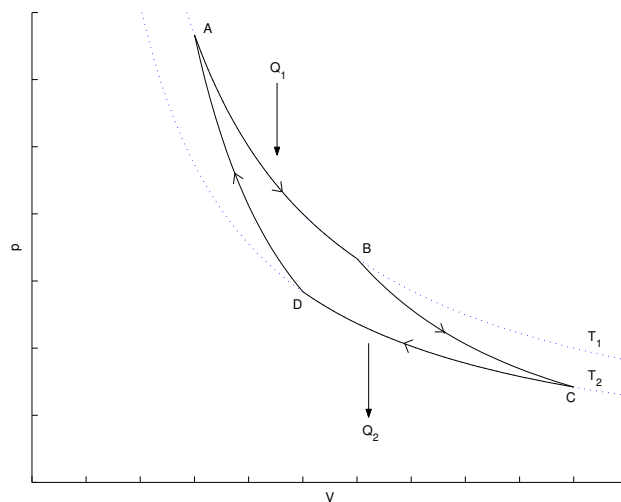


Figura 8.7: Ciclo di Carnot

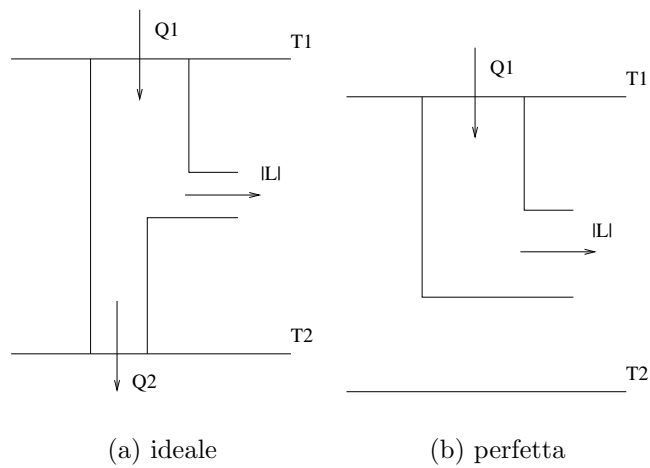


Figura 8.8: Macchina di Carnot

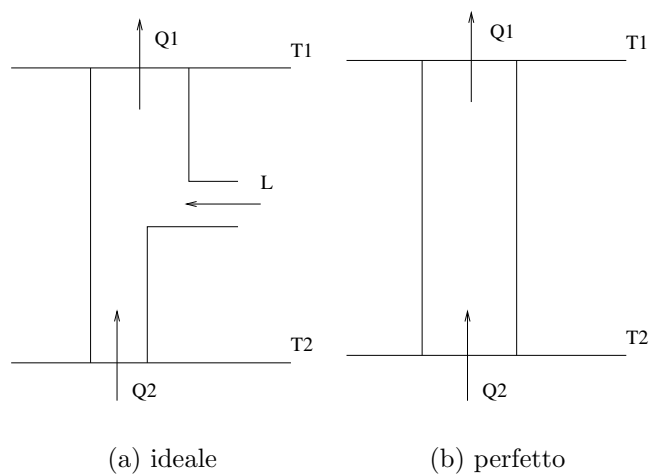


Figura 8.9: Frigorifero

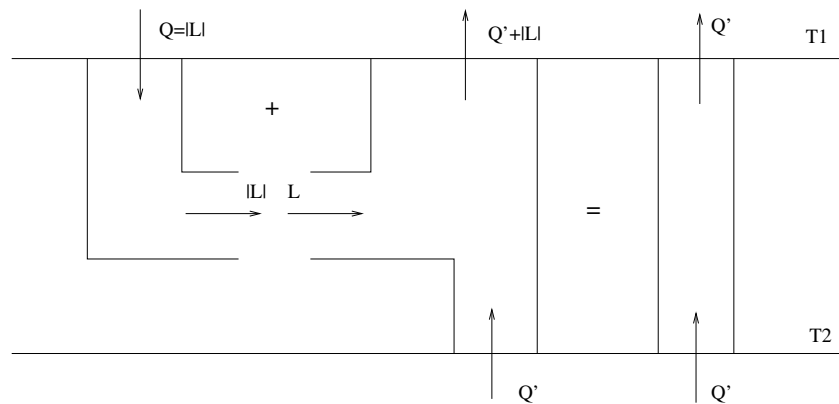


Figura 8.10: Antikelvin più un frigorifero

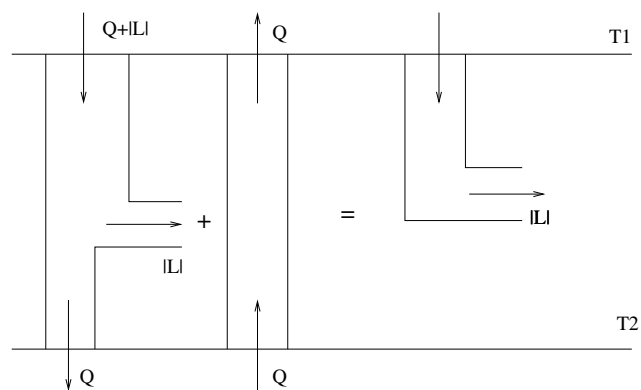


Figura 8.11: Anticlausius più una macchina termica

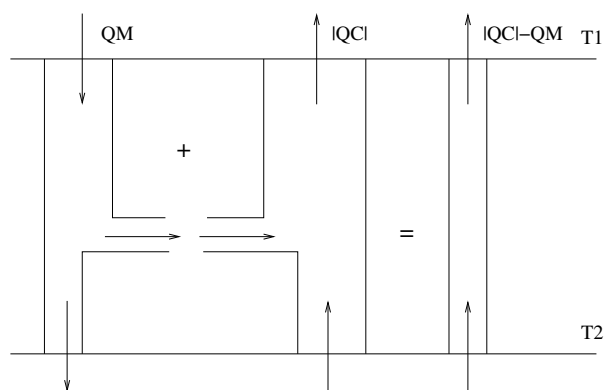


Figura 8.12: Macchina M più la macchina di Carnot al contrario

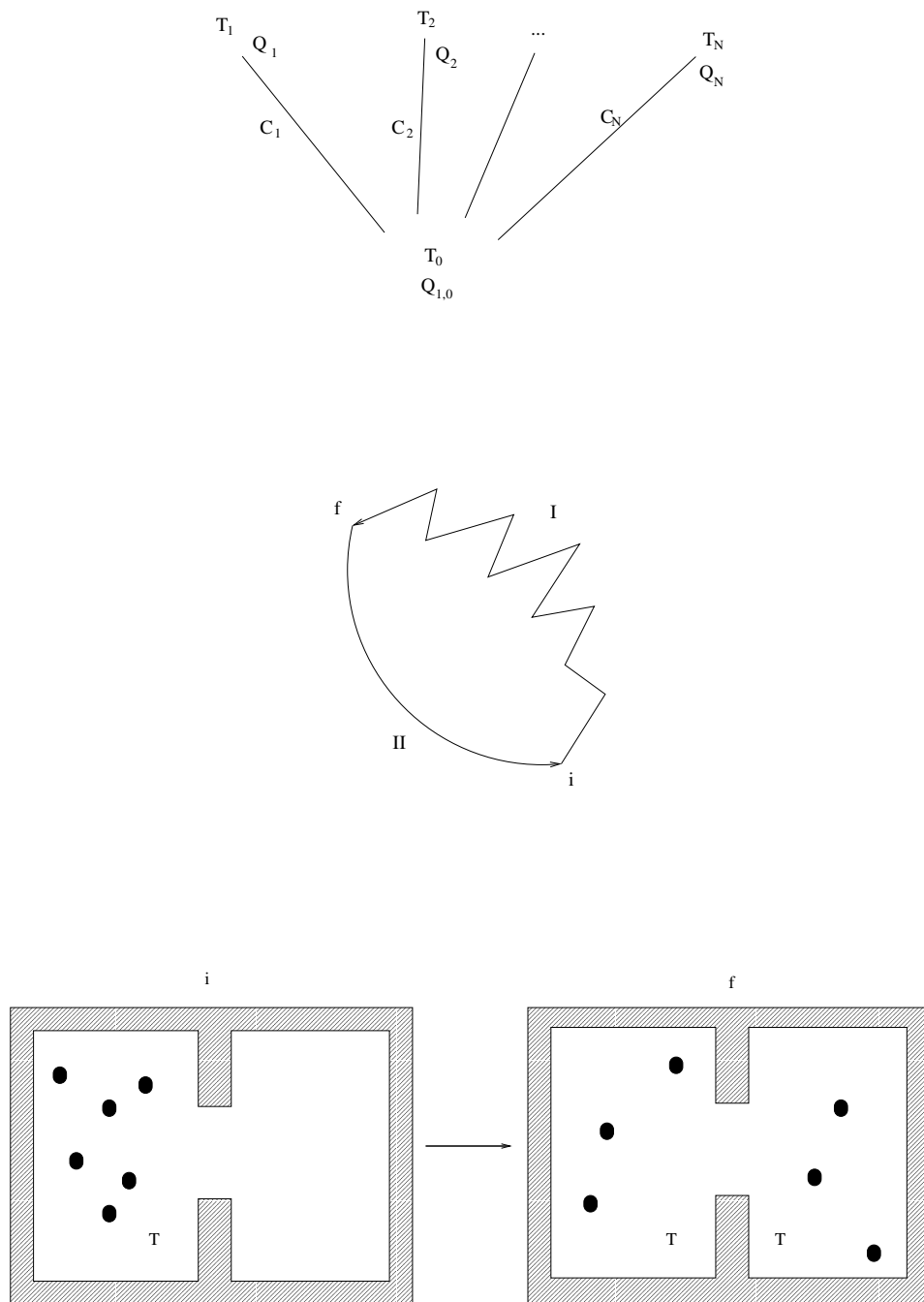


Figura 8.13: espansione di Joule

9

Relatività speciale

La relatività ristretta modifica la meccanica classica, facendo notare le differenze ad alte energie. Essa deve rispettare il principio di corrispondenza, cioè deve spiegare come la relatività classica possa funzionare a basse energie, cioè come possa essere interpretata come approssimazione per basse energie.

Alla fine dell'800 si sviluppa l'elettromagnetismo, mentre la meccanica di Newton era stata applicata a tutti i campi conosciuti con estremo successo.

Bisognava far convivere le equazioni di Maxwell con quelle di Newton.

Le leggi della meccanica sono le stesse per traslazioni uniformi, cioè sono invarianti. Variabili invarianti sono quelle che non cambiano per sistemi di riferimento inerziali, come l'accelerazione, la massa. Non si può solamente con esperimenti di meccanica determinare se il sistema è fermo o in modo rettilineo uniforme, cioè non si possono distinguere i sistemi inerziali, quindi non esiste un sistema privilegiato.

9.1 Esperimento di Michelson–Morley

Maxwell dice $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$, cioè che la velocità della luce nel vuoto è costante e non dipende dal sistema di riferimento, contrariamente alle trasformate di Galileo. A meno di associare quel valore c ad un sistema di riferimento privilegiato si crea una spaccatura tra l'elettromagnetismo e la meccanica di Newton. Si inventa l'etere, Michelson–Morley dimostrano che questo non può esistere.

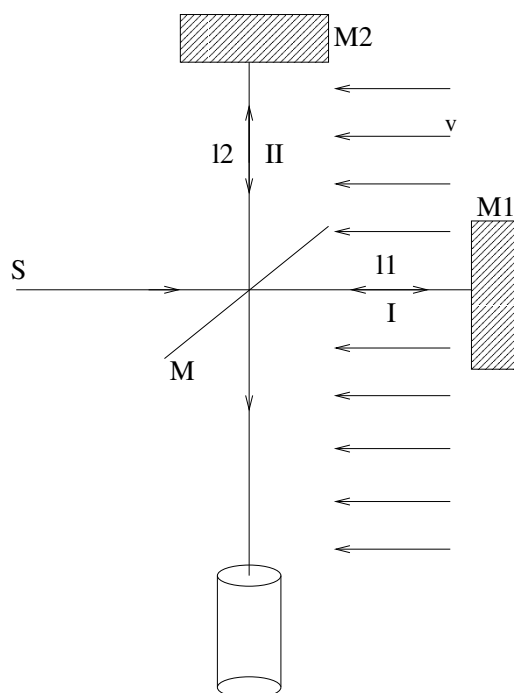


Figura 9.1: Esperimento di Michelson–Morley

Nell'esperimento la luce proviene da una sorgente S , viene parzialmente riflessa da uno specchio semiargentato M e contemporaneamente trasmessa. La luce quindi segue due cammini: I e II; si riflette sugli specchi M_1 e M_2 e si riunisce in un raggio unico, prima di arrivare ad un'analizzatore. Le lunghezze dei percorsi dopo lo specchio M , l_1 e l_2 sono circa uguali, ma non uguali se riferite alla lunghezza d'onda della luce, quindi nell'analizzatore si dovrebbe vedere una figura d'interferenza. Si suppone che l'etere sia il sistema di riferimento assoluto e che l'apparecchio si muova con velocità v verso destra, quindi si può supporre che si l'etere a spostarsi verso sinistra con velocità v , il "vento d'etere". Non si considera il percorso dalla sorgente allo specchio M e dallo specchio M al rivelatore, in quanto i raggi viaggiano insieme. Il tempo per andare da M a M_1 e tornare è:

$$t_1 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = \frac{l_1(2c)}{c^2 - v^2} = \frac{2c}{c^2} \frac{l_1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Il percorso II è ortogonale al vento d'etere, per semplicità si considera il tempo dal punto di vista del vento d'etere

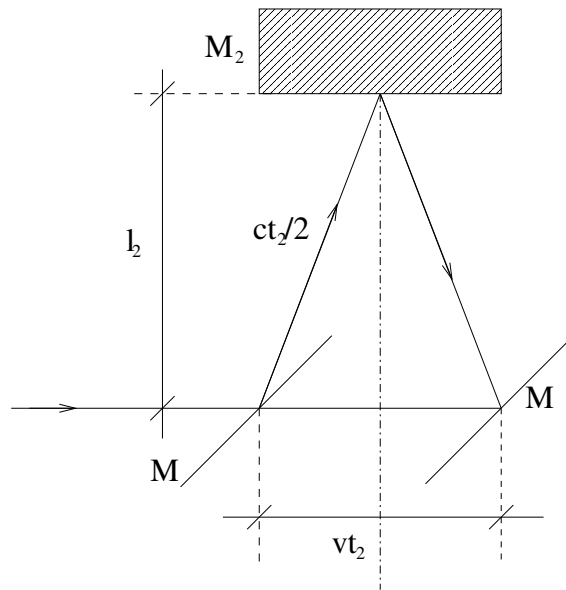


Figura 9.2: apparecchiatura vista dall'etere

$$s = 2\sqrt{l_2^2 + \left(\frac{vt_2}{2}\right)^2} = ct_2$$

$$l_2^2 + \frac{v^2 t_2^2}{4} = \frac{c^2 t_2^2}{4} \quad l_2^2 = \frac{1}{4} (c^2 - v^2) t_2^2$$

$$t_2 = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

La differenza di tempo dei due cammini è:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2}{c} \left\{ \frac{l_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - \frac{l_1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right\}$$

Se l'apparecchiatura viene ruotata di 90° l_1 e l_2 si invertono:

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{2}{c} \left\{ \frac{l_2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - \frac{l_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right\}$$

Si dovrebbe osservare una figura di interferenza diversa:

$$\begin{aligned}\Delta = \Delta t' - \Delta t &= \frac{2}{c} \left\{ \frac{l_1 + l_2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - \frac{l_1 + l_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right\} \\ &= \frac{2}{c} (l_1 + l_2) \left\{ 1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \dots - \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \right\} \\ &\simeq \frac{2}{c} (l_1 + l_2) \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{l_1 + l_2}{c} \left(\frac{v}{c}\right)^2\end{aligned}$$

Con più riflessioni si riesce ad avere $l_1 + l_2 = 20$ m, considerando il Sole come riferimento assoluto si ha $v = 30$ km/s e $\lambda = 500 \times 10^{-9}$ m. Il numero di frange che scorrono dovrebbe essere:

$$\Delta N = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{l_1 + l_2}{\lambda} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \simeq 0.4$$

La sensibilità dello strumento era $\Delta N = 0.01$. Se ci fosse stato l'etere con quella velocità sarebbe stato osservato. La ricerca dell'etere ripetuta in più mesi dell'anno, di giorno e di notte, usando luce solare, stellare ed artificiale, con dispositivi diversi, usando bracci diversi, telescopi o osservando fenomeni elettrici diede risultato negativo. Nel 1907 Nobel per Michelson.

9.2 Postulati di Einstein

Postulato 9.1 (Primo postulato della relatività ristretta) *Tutte le leggi fisiche sono invarianti per traslazioni uniformi*

Postulato 9.2 (Secondo postulato della relatività ristretta) *La velocità della luce nel vuoto è uguale in tutti i sistemi di riferimento*

I postulati di Einstein sono ampiamente verificati sperimentalmente. L'esperimento di Michelson–Morley giustifica il primo postulato di Einstein. Per il secondo esperimento si può considerare il seguente esperimento: il Sole ruota rispetto al suo asse, quindi la sorgente di luce si muove. Si misura la differenza di velocità dei raggi di luce provenienti da due estremi dell'equatore del sole. Le velocità misurate erano abbastanza simili da verificare il secondo postulato.

9.2.1 Simultaneità

I due pistoleri (Fig. 9.3) sparano quando la luce gli raggiunge. Essi sono in un sistema solidale con la luce e quindi vedono contemporaneamente la luce

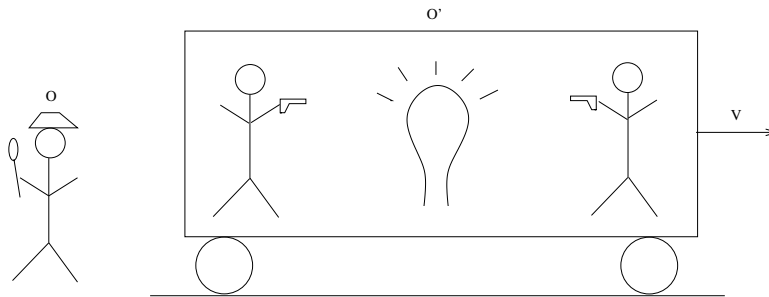


Figura 9.3: pistoleri relativistici

della lampadina. Per il capostazione “fermo” invece è il pistolero di sinistra ad essere investito per prima dalla luce, quindi il pistolero a destra muore, mentre quello di sinistra no. Gli eventi simultanei per O' non sono tali per O , bisogna rivedere il concetto di tempo assoluto.

9.3 Trasformate di Lorentz

Le trasformate di Lorentz sostituiscono le trasformate di Galileo della meccanica classica. Per velocità basse rispetto a quelle della luce le trasformate di Lorentz tendono a quelle di Galileo. La funzione che trasforma le coordinate di un sistema di riferimento a quelle di un altro deve essere lineare, in quanto lo spazio è omogeneo. Immaginiamo che l'applicazione non sia omogenea, e quindi non lineare, per esempio: $x' = kx^2$. Se mettiamo una sbarra tra 0 e 1 questa misura $\Delta x = 1 - 0 = 1$, nel nuovo sistema di riferimento misura: $k \cdot 1^2 - k \cdot 0^2 = k$. Se ora mettiamo la sbarra tra 2 e 1 nel primo sistema di riferimento misurerà ancora 1, mentre nel secondo $k(2^2 - 1^2) = 3k$ ovvero spostando la sbarra nel secondo sistema di riferimento la sua lunghezza cambia: assurdo per l'ipotesi di omogeneità dello spazio; inoltre l'applicazione deve essere anche additiva, perché la lunghezza di due sbarre affiancate deve essere la somma dell'unica sbarra avente lunghezza uguale nel primo sistema di riferimento alla somma delle lunghezze delle due sbarre nel primo sistema di riferimento. Consideriamo il sistema di riferimento Oxy fermo e $O'x'y'$ che si muove rispetto ad O di moto rettilineo uniforme con velocità di trascinamento u nella direzione dell'asse x crescente. L'applicazione è lineare, quindi (in due dimensioni spaziali), in generale:

$$\begin{cases} x' = \lambda_{11}x + \lambda_{12}y + \lambda_{14}t \\ y' = \lambda_{21}x + \lambda_{22}y + \lambda_{24}t \\ t' = \lambda_{41}x + \lambda_{42}y + \lambda_{44}t \end{cases}$$

“Solo” 9 incognite. Ipotesi aggiuntive:

- al tempo $t = t' = 0$ gli orologi coincidono e anche i sistemi di riferimento $O \equiv O'$, in particolare per $t = 0$ e $x = 0$ segue $x' = 0$ cioè

$$x' = \lambda_{11}x + \lambda_{12}y + \lambda_{14}t$$

$$0 = \lambda_{11} \cdot 0 + \lambda_{12}y + \lambda_{14} \cdot 0$$

$$\lambda_{12} = 0$$

- come sopra:

$$t' = \lambda_{41}x + \lambda_{42}y + \lambda_{44}t$$

$$0 = 0 + \lambda_{42}y + 0$$

$$\lambda_{42} = 0$$

- la traslazione del sistema in moto è orizzontale, quindi $y' = 0 \Leftrightarrow y = 0$ sempre.

$$\lambda_{21} = 0$$

$$\lambda_{24} = 0$$

Se mettiamo una sbarra verticalmente con un'estremo in O' , questo misura che la lunghezza è 1. La sbarra si muove con O' e quindi questa è la lunghezza a riposo. Questa lunghezza a riposo dovrà essere uguale anche se è osservata da O . Mettiamo la sbarra ferma rispetto ad O' , quindi O vede una lunghezza:

$$y = \frac{1}{\lambda_{22}}$$

mettiamo ora la sbarra ferma rispetto a O , O' vede una lunghezza:

$$y' = \lambda_{22}$$

Le due situazioni sono simmetriche e quindi non esistendo un sistema privilegiato le due grandezze devono essere uguali:

$$\lambda_{22} = \frac{1}{\lambda_{22}} \quad \lambda_{22}^2 = 1$$

Si scarta la soluzione negativa, in quanto si vuole che gli assi abbiano lo stesso verso.

Seguiamo il moto dell'origine del sistema O' . Qui, per ogni istante:

$$x' = 0$$

Per O lo stesso moto è descritto da:

$$x = ut \quad x - ut = 0$$

Ci si aspetta allora un'equazione del tipo

$$x' = \lambda(x - ut)$$

A $t = 0$, $O \equiv O'$, $t = t'$ scatta un'onda luminosa dalle origini, questa ha un fronte sferico con raggio R e per il secondo principio di Einstein ha velocità c uguale in tutti e due i sistemi. Il sistema O' sta arrivando da sinistra, passa in coincidenza con O , si sincronizzano gli orologi e parte il fronte d'onda. I due osservatori osservano un fronte d'onda che ha centro nei propri sistemi di riferimento, anche se non sono più coincidenti:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 = (ct)^2$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = R'^2 = (ct')^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - ct^2 = 0 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2$$

$$\begin{aligned} x^2 - c^2 t^2 &= x'^2 - c^2 t'^2 = \lambda^2 (x - ut)^2 - c^2 (\lambda_{41} x + \lambda_{44} t)^2 = \\ &= \lambda^2 x^2 + \lambda^2 u^2 t^2 - 2\lambda^2 xut - c^2 \lambda_{41}^2 x^2 - c^2 \lambda_{44}^2 t^2 - 2c^2 \lambda_{41} x \lambda_{44} t \end{aligned}$$

Risolvendo in λ^2 , λ_{41}^2 e λ_{44}^2 si ottiene un sistema di tre incognite e tre equazioni:

$$\begin{cases} 1 = \lambda^2 - c^2 \lambda_{41}^2 \\ -c^2 = \lambda^2 u^2 - c^2 \lambda_{44}^2 \\ 0 = -2\lambda^2 u - 2c^2 \lambda_{41} \lambda_{44} \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_{41}^2 = \frac{\lambda^2 - 1}{c^2} \\ \lambda_{44}^2 = \frac{c^2 + \lambda^2 u^2}{c^2} \\ -\lambda^2 u = c^2 \lambda_{41} \lambda_{44} \end{cases}$$

Ci ricordiamo dell'ultima espressione che $\lambda_{41} \lambda_{44} < 0$

$$\begin{aligned} \lambda^4 u^2 &= c^4 \lambda_{41}^2 \lambda_{44}^2 = c^4 \frac{\lambda^2 - 1}{c^2} \frac{c^2 + \lambda^2 u^2}{c^2} = \\ &= (\lambda^2 - 1)(c^2 + \lambda^2 u^2) = -c^2 - \lambda^2 u + \lambda^2 c^2 + \lambda^4 u^2 \\ 0 &= -c^2 - \lambda^2 u^2 + \lambda^2 c^2 \\ \lambda^2 &= \frac{c^2}{c^2 - u^2} = \frac{1}{1 + \frac{u^2}{c^2}} \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma$$

$$\lambda_{41}^2 = \frac{\lambda^2 - 1}{c^2} = \frac{\beta^2}{c^2(1 - \beta^2)}$$

$$\lambda_{41} = \pm \frac{\beta}{c\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\lambda_{44}^2 = \frac{c^2 + \lambda^2 u^2}{c^2} = \frac{1}{1 - \beta^2}$$

$$\lambda_{44} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Diamo segno positivo a λ_{44} e negativo a λ_{41} , in quanto se consideriamo un istante molto prossimo al momento della partenza allora $x \rightarrow 0$, t' deve essere positivo (il tempo scorre nello stesso verso) e quindi $\lambda_{44} > 0$.

9.3.1 Trasformate di Lorentz e Galileo

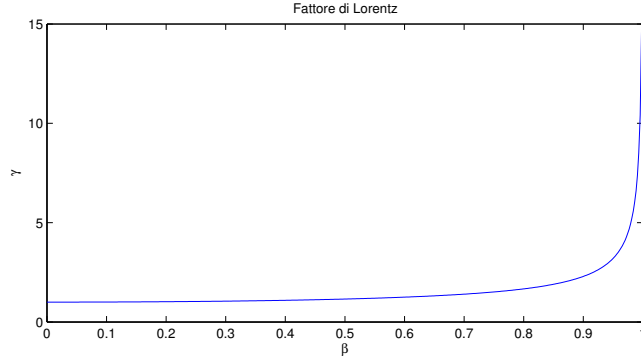
Se $u \ll c$, cioè se $\beta \rightarrow 0 \Rightarrow \text{Lorentz} \rightarrow \text{"buon" Galileo}$ e il tempo assoluto.

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{array} \right. \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} \left\{ \begin{array}{l} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{array} \right.$$

9.4 Contrazione delle lunghezze

Consideriamo spazi nello stesso tempo. Posizioniamo un'asta con estremi A e B ferma rispetto ad O' , sistema di riferimento inerziale con velocità u rispetto ad O . O misura nello stesso istante le posizioni di A e di B , quindi $t_A \equiv t_B$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_A = \frac{x_A - ut_A}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ x'_B = \frac{x_B - ut_B}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{array} \right.$$

Figura 9.4: Variazione di γ in funzione di β

$$l' = x'_B - x'_A = \frac{x_B - x_A - ut_B + ut_A}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x_B - x_A - u(t_B - t_A)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x_B - x_A}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma l$$

$$l = \frac{l'}{\gamma} \quad (9.1)$$

Considerando che $0 < \beta < 1 \Rightarrow \gamma > 1$ si ha che $l < l'$, cioè O osserva un oggetto in moto contratto.

9.5 Dilatazione dei tempi

Consideriamo eventi osservati da O' nello stesso spazio ($x'_A \equiv x'_B$) a distanza di tempo $\tau' = t'_B - t'_A$.

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\beta}{c} x \right)$$

Per simmetria posso dire direttamente che:

$$t = \gamma \left(t' + \frac{\beta}{c} x' \right)$$

$$t_A = \gamma \left(t'_A + \frac{\beta}{c} x'_A \right)$$

$$t_B = \gamma \left(t'_B + \frac{\beta}{c} x'_B \right)$$

$$\tau = t_B - t_A = \gamma \left(t'_B - t'_A + \frac{\beta}{c} (x'_B - x'_A) \right) = \gamma (t'_B - t'_A) = \gamma \tau' \quad (9.2)$$

Ancora, essendo $\gamma > 1$ si ha che $\tau > \tau'$ cioè O vede l'evento più lentamente di O' .

Esempio 9.1 (produzione e decadimento di mesoni π^+) Un protone colpisce un altro protone fermo:

$$p + p \rightarrow p + n + \pi^+$$

Il mesone decade:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$$

Un omino cavalca il mesone π^+ e osserva un tempo di vita media $\tau' = 1.88 \times 10^{-8}$ s. Il mesone ha rispetto al laboratorio $\beta = 0.99$. Il laboratorio dalla distanza percorsa dal mesone calcola una vita media diversa:

$$\tau = \gamma\tau' = \frac{\tau'}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq 7.1\tau' = 1.3 \times 10^{-7} \text{ s}$$

La distanza percorsa dal mesone, prima di decadere, osservata dal laboratorio è quindi:

$$d = \tau u = \tau\beta c \simeq 39 \text{ m}$$

9.6 Composizione delle velocità

La velocità rimane sempre la derivata del vettore posizione: $v_x = \frac{dx}{dt}$.

$$v'_{x'} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \frac{1}{\frac{dt'}{dt}} = \gamma \left(\frac{dx}{dt} - u \right) \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{\beta}{c} \frac{dx}{dt} \right)} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{\beta}{c} v_x} \quad (9.3)$$

$$v'_{y'} = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dt'} = v_y \frac{1}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{\beta}{c} \frac{dx}{dt} \right)} = \frac{v_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{\beta}{c} v_x} \quad (9.4)$$

Un'analoga equazione vale per $v'_{z'}$, essendo come $v'_{y'}$ una velocità trasversa rispetto ad u .

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} v'_{x'} = v_x - u \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} v'_{y'} = v_y$$

cioè la composizione delle velocità secondo Galileo.

Esempio 9.2 (decadimento π^0) π^0 decade con un decadimento elettromagnetico del tipo:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$$

Per la conservazione della quantità di moto i due fotoni devono avere velocità opposte, c misurate da O' , supponiamo che decadano secondo l'asse x e che il mesone si muovesse alla velocità u verso destra rispetto ad O . Per Einstein la velocità dei due fotoni vista da O e da O' è uguale. Per il fotone che va a destra:

$$v_x = \frac{v'_{x'} + u}{1 + \frac{\beta}{c}v'_{x'}} = \frac{c + u}{1 + \frac{u}{c^2}c} = c$$

Per l'altro:

$$v_x = \frac{-c + u}{1 - \frac{u}{c^2}(-c)} = -c$$

9.7 Massa

Dalla conservazione della quantità di moto ricaviamo la massa relativistica. Siano O e O' due osservatori dotati di due pistole identiche con proiettili identici, cioè con stesse masse a riposo. O' si muove verso destra rispetto ad O con velocità costante \vec{u} . Gli assi x e x' non coincidono, sono sfasati, ma questo conta poco perché considerando le velocità, cioè derivando, il problema scompare. O' spara in direzione di O cioè nel verso delle y decrescenti. O vede il suo proiettile con velocità:

$$\dot{y}'_{O'} = -U \quad \dot{x}'_{O'} = 0$$

O vede il proiettile di O' con velocità:

$$\dot{y}_{O'} = \frac{\dot{y}'_{O'} \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{\beta}{c}\dot{x}'_{O'}} = -\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}U$$

O spara a O' nel verso delle y crescenti e misura la velocità del proiettile:

$$\dot{y}_O = U \quad \dot{x}_O = 0$$

e O' vede il proiettile di O con:

$$\dot{y}'_O = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}U$$

la quantità di moto si deve conservare quindi O vede:

$$m_O U + m_{O'} \dot{y}_{O'} = 0$$

$$m_{O'} = \frac{m_O U}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} U = \frac{m_O}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Considerando O fermo:

$$m_O = m_0 = \text{massa a riposo}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma m_0$$

$$\beta \rightarrow 1 \Rightarrow m \rightarrow +\infty$$

9.8 Quantità di moto

$$p = mv = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \beta c$$

β della particella. Con questa nuova definizione di quantità di moto essa si conserva ancora, anche in contesto relativistico.

$$\beta \rightarrow 1 \Rightarrow p \rightarrow +\infty$$

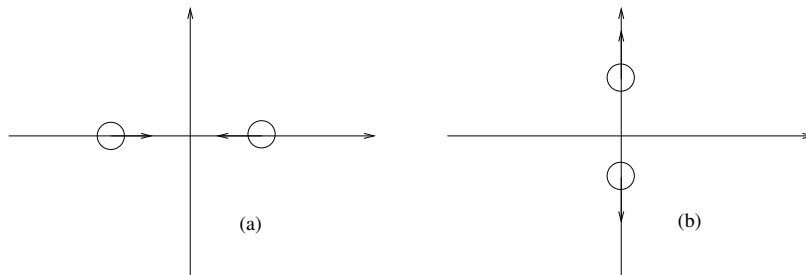


Figura 9.5: (a) prima dell'urto; (b) dopo l'urto

Esempio 9.3 (quantità di moto classica vs relativistica) Urto frontale tra due particelle con stessa massa e velocità, sull'asse x . Dopo l'urto le particelle possono andare su qualunque direzione, ipotizziamo quella verticale. La quantità di moto si conserva, infatti all'inizio:

$$p_x = mv_x - mv_x = 0 \quad p_y = mv_y - mv_y = 0$$

e dopo l'urto:

$$p_x = mv_x - mv_x = 0 \quad p_y = mv_y - mv_y = 0$$

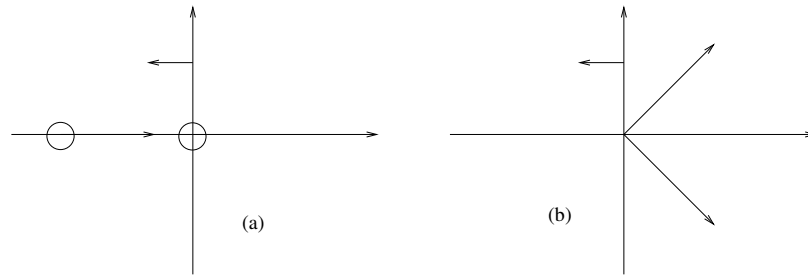


Figura 9.6: (a) prima dell'urto; (b) dopo l'urto

Quindi sembra che la conservazione della quantità di moto classica funzioni. Cambiamo sistema di riferimento, consideriamo quello solidale con la seconda particella. Esso prima dell'urto si muove con velocità $u = v$ verso sinistra. Utilizzando le composizioni delle velocità relativistiche:

$$\begin{cases} p'_{x'} = p'_{x_1} = \frac{v + v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} m = \frac{2v}{\frac{c^2 + v^2}{c^2}} m = 2mu \frac{1}{1 + \beta^2} \\ p'_{y'} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p'_{x'} = 2mv'_{x'} = 2mu \\ p'_{y'} = 0 \end{cases}$$

La quantità di moto fallisce. Bisogna considerare la correzione della massa.

9.9 Energia Relativistica

9.9.1 Teorema lavoro-energia

Per far funzionare il teorema $L = \Delta K$ bisogna cambiare la definizione di energia cinetica.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$m^2(1 - \beta^2) = m_0^2 \quad m^2 c^2 - m^2 v^2 = m_0^2 c^2$$

$$2mc^2 dm - 2mv^2 dm - 2m^2 v dv = 0$$

$$c^2 dm = v^2 dm + m v dv$$

Considerando solo una forza diretta come l'asse x :

$$L = \int_A^B \vec{F} d\vec{x} = \int \frac{d\vec{p}}{dt} d\vec{x} = \int d\vec{p} \frac{d\vec{x}}{dt} = \int \vec{v} d\vec{p} = \int \vec{v} d(m\vec{v}) = \Delta K =$$

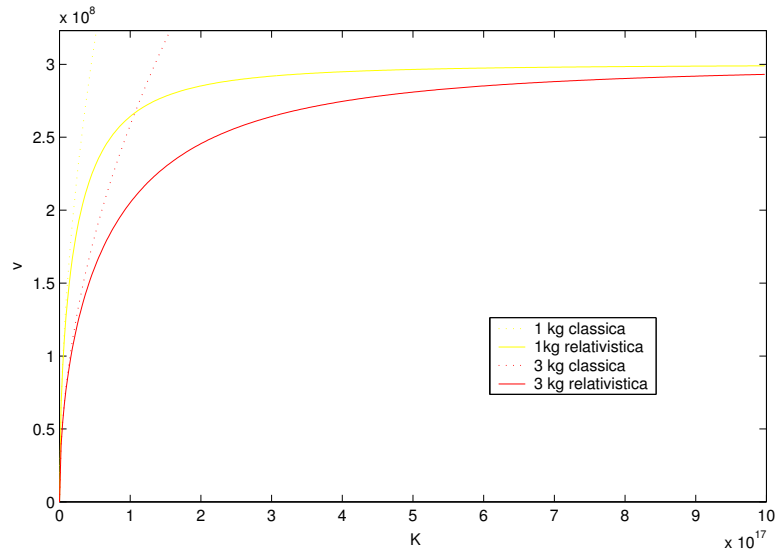


Figura 9.7: Velocità in funzione dell'energia cinetica con diverse masse

$$= \int (dm\vec{v} + m d\vec{v})\vec{v} = \int (dmv^2 + mv dv) = c^2 \int_{v_A}^{v_B} dm = (m(v_B) - m(v_A)) c^2$$

Se $K(0) = 0$ in accordo con quella classica:

$$K(B) = K(B) - K(0) = \Delta K = (m_B - m_0)c^2 \quad K = mc^2 - m_0c^2$$

$$\underbrace{m_0c^2}_{\text{energia a riposo}} + \underbrace{K}_{\text{energia cinetica}} = \underbrace{mc^2}_{\text{energia totale}}$$

$$E = mc^2 \quad \Delta E = \Delta K = L$$

$$K = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0c^2 = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) = m_0c^2 (\gamma - 1)$$

9.9.2 Energia cinetica classica

$$v \ll c \quad m_0c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots - 1 \right) = \frac{1}{2}m_0\beta^2c^2 = \frac{1}{2}m_0v^2$$

9.9.3 Urti ed energia

$$E = m_0c^2 + K = mc^2$$

La massa durante l'urto può aumentare, si creano nuove particelle. Non basta avere molta energia per creare nuove particelle, ma bisogna concentrarla.

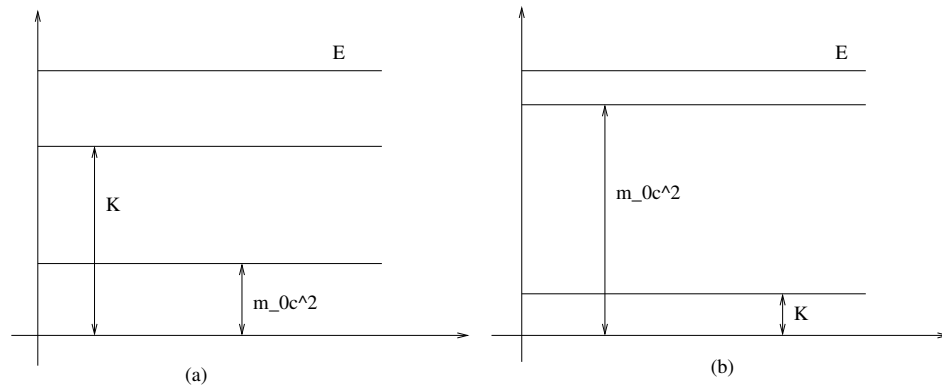


Figura 9.8: (a) prima dell'urto; (b) dopo l'urto

9.9.4 Conservazione dell'energia

In meccanica classica il teorema della conservazione dell'energia diceva che l'energia totale si conservava:

$$K + U = E = \text{const}$$

L'energia potenziale ha sempre la stessa definizione, il lavoro è definito come variazione dell'energia totale (mc^2):

$$\int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) = \int_{r_1}^{r_2} dK = m_{r_2}c^2 - m_{r_1}c^2$$

$$m_{r_1}c^2 + U(r_1) = m_{r_2}c^2 + U(r_2)$$

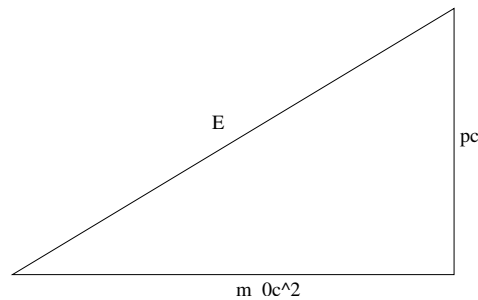
$$mc^2 + U = \text{const}$$

9.10 Quantità di moto ed energia

$$\begin{cases} E = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}c^2 \\ p = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\beta c \end{cases} \Rightarrow \frac{p}{E} = \frac{\beta}{c} \Rightarrow \beta E = pc$$

$$E^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1-\beta^2} \quad E^2 - \beta^2 E^2 = m_0^2 c^4 \quad E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

$$E^2 = (m_0 c^2)^2 + (pc)^2$$



9.11 Elettronvolt

La carica dell'elettrone vale circa 1.6×10^{-19} C. 1 eV è quell'energia che acquista un elettrone accelerato da una ddp di 1 V

$$E = qV \quad \text{eV} = q_e(1 \text{ V}) = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Molto usati sono i multipli: keV(chév), MeV(mev), GeV(gev), TeV(tev), PeV(pev).

Anche le masse e le quantità di moto si possono esprimere in eV, combinando opportunamente c .

$$E = mc^2$$

$$1 \text{ kg } c^2 = 1 \text{ kg}(3 \times 10^8 \text{ m/s}) = 9 \times 10^{16} \text{ J} = 5.62 \times 10^{35} \text{ eV}$$

$$1 \text{ eV}/c^2 = 1.78 \times 10^{-36} \text{ kg}$$

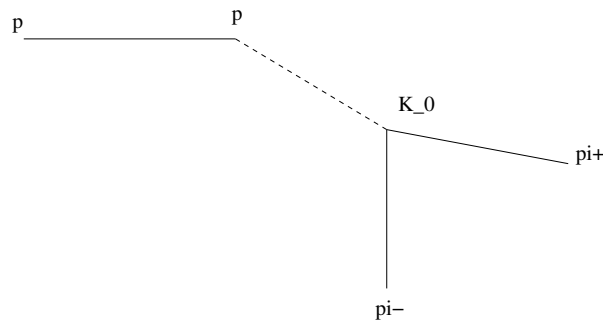


Figura 9.9: Un protone urta un protone fisso, si genera un K_0 che non è rilevabile in quanto neutro, dopo τ decade nei mesoni

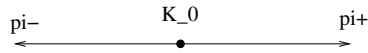
Esempio 9.4 (decadimento particella strana)

$$K_0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$$

$$m_0^{K_0} = 500 \text{ MeV}/c^2 \quad m_0^{\pi^+} = 140 \text{ MeV}/c^2$$

$$\tau_{K_0} = 0.9 \times 10^{-10} \text{ s}$$

Nel sistema di K_0 l'impulso dei mesoni è:



$$\vec{p}_0 = 0 \quad \vec{p}_f = 0 \quad \vec{p}_{\pi^+} + \vec{p}_{\pi^-} = 0$$

$$p_{\pi^+} = p_{\pi^-} \quad m_0^{\pi^+} = m_0^{\pi^-} = m_0^{\pi} \quad p_{\pi^+} = p_{\pi^-} = p_{\pi} \quad E_0 = E_f$$

$$E_0 = m_0^{K_0} c^2 = E_f = \sqrt{(m_0^{\pi^+} c^2)^2 + p_{\pi^-}^2 c^2} + \sqrt{(m_0^{\pi^-} c^2)^2 + p_{\pi^+}^2 c^2} =$$

$$= 2\sqrt{(m_0^{\pi} c^2)^2 + p_{\pi}^2 c^2}$$

$$(m_0^{K_0})^2 c^4 = 4(m_0^{\pi} c^2)^2 + 4p_{\pi}^2 c^2$$

$$p_{\pi}^2 = \frac{(m_0^{K_0})^2 c^4 - 4(m_0^{\pi})^2 c^4}{4c^2} = \frac{(m_0^K)^2 c^2}{4} - (m_0^{\pi})^2 c^2$$

$$p_{\pi} = c\sqrt{\frac{(m_0^K)^2 c^2}{4} - (m_0^{\pi})^2}$$

9.12 Forza e accelerazione

Newton: $\vec{F} = m\vec{a}$

$$dK = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$E = mc^2 = K + m_0 c^2 \quad dm = \frac{1}{c^2} dK = \frac{1}{c^2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

partiamo da quantità che abbiamo già ben definito in relatività: p e t

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{c^2} \vec{F} \frac{d\vec{s}}{dt} \vec{v} + m\vec{a} = \frac{1}{c^2} (\vec{F}\vec{v})\vec{v} + m\vec{a}$$

La direzione di \vec{F} e di \vec{a} non è la stessa (!)

9.12.1 Casi Particolari

$\vec{F} // \vec{v}$

$$F = \frac{1}{c^2} F v^2 + ma$$

$$F = \frac{ma}{1 - \beta^2} = \frac{m_0}{1 - \beta^2} (1 - \beta^2)^{-1/2} a = \underbrace{\frac{m_0}{(1 - \beta^2)^{3/2}}}_{\text{massa longitudinale}} a = m_{//} a$$

$$\vec{F} \perp \vec{v}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = \underbrace{\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}}_{\text{massa trasversa}} \vec{a} = m_{\perp} \vec{a}$$

Esempio 9.5 (elettrone in campo magnetico)

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Campo magnetico ortogonale alla velocità¹

$$F = qvB = m_{\perp} \frac{v^2}{r}$$

$$r = \frac{m_{\perp} v}{qB} = \frac{p}{qB}$$

$$\vec{F} \perp \vec{v} \Rightarrow L = \text{cost} \Rightarrow v = \text{cost} \Rightarrow p = \text{cost} \Rightarrow r = \text{cost}$$

$$B = 2 \text{ Wb/m}^2 \quad K = 10 \text{ MeV}$$

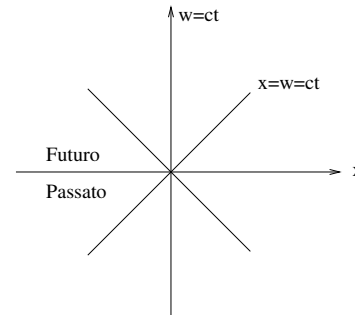
$$r = 1.8 \text{ cm} \quad \text{Relativistico}$$

$$r = 0.5 \text{ cm} \quad \text{Classico}$$

¹per una trattazione più completa vedi ?? a pag.??

9.13 Spazio di Minkowski

Lo spazio di Minkowski è utile per dare un significato geometrico alla relatività speciale. Per comodità grafiche consideriamo solo una coordinata spaziale e una temporale. Sull'asse delle ascisse rappresentiamo x e sull'asse delle ordinate il tempo moltiplicato per c , che lo rende uno spazio. La bisettrice dei quadranti è la linea di universo della luce, essa rappresenta il cammino di un raggio luminoso.



$$\frac{dw}{dx} = \frac{d(ct)}{dx} = c \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{c}{v} > 1$$

Quindi la traiettoria di ogni punto massivo nel piano di Minkowski deve avere tangente in ogni punto maggiore di uno, altrimenti andrebbe più veloce della luce. Creiamo un nuovo sistema di riferimento inerziale.

$$\begin{cases} x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ t' = \frac{t-\frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \frac{x-\beta w}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ w' = \frac{w-\beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

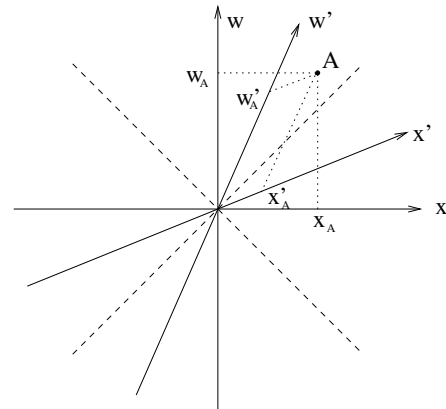
$$w' = ct' = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

asse x' : $w' = 0$, cioè

$$w = \beta x$$

asse w' : $x' = 0$, cioè

$$w = \frac{x}{\beta}$$



Più β tende a 1 e più i due assi del nuovo sistema di riferimento tendono alla bisettrice del primo-terzo quadrante.

9.13.1 Dilatazione dei tempi

A e B sono due eventi simultanei per OXY , ma non lo sono per $O'X'Y'$. Analogamente si dimostra la contrazione delle lunghezze.

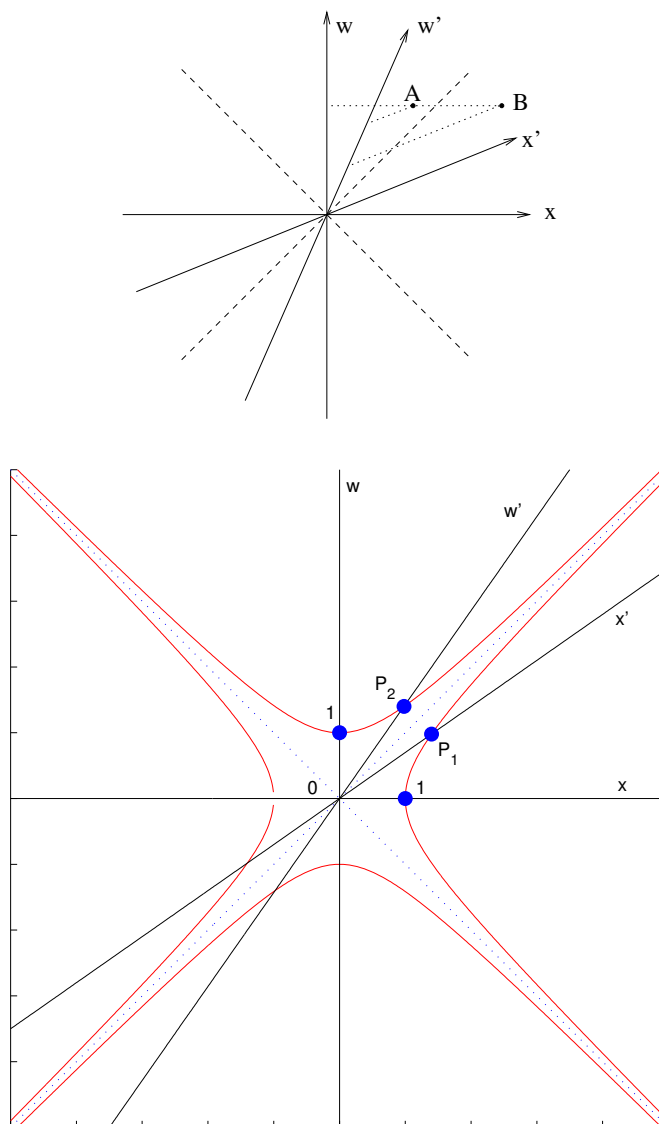


Figura 9.10: Curve di calibrazione

9.13.2 Curve di calibrazione

$$\begin{cases} w^2 - x^2 = 1 \\ x^2 - w^2 = 1 \end{cases}$$

$$P_1 \begin{cases} x^2 - w^2 = 1 \\ w' = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2(1 - \beta^2) = 1 \\ x = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases}$$

$$x' = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \beta w}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \beta^2 x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1$$

$$\begin{array}{cc} P_1(1, 0) & P_2(0, 1) \\ \overline{OP_1} > \overline{01} & \overline{OP_2} > \overline{01} \end{array}$$

9.14 Dubbi di Einstein

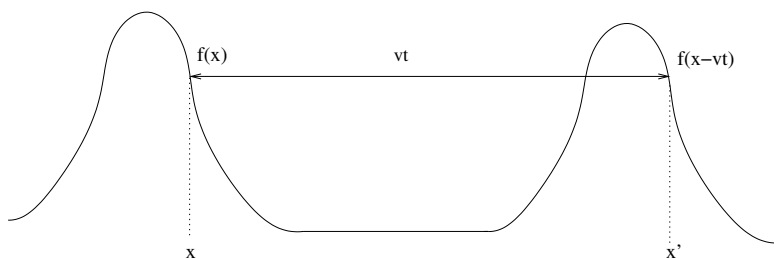
Einstein si interrogava di come le forze potessero propagarsi, in particolare quella gravitazionale. Se il Sole scomparisse per Newton la Terra istantaneamente partirebbe per la tangente. Per Einstein ciò è impossibile, perché nulla, nemmeno la forza gravitazionale, o l'informazione "il Sole non c'è più", può viaggiare più veloce della luce. Con la generale si risolve il problema, la massa incurva lo spazio.

10

Onde

Le onde sono un moto che trasporta energia, mentre generano uno spostamento netto di materia nullo. Le onde meccaniche sono quelle che hanno bisogno di un mezzo elastico per propagarsi, le onde elettromagnetiche si propagano anche nel vuoto. Le onde trasversali sono quelle in cui la direzione di propagazione dell'onda è ortogonale al moto delle particelle. Le onde longitudinali sono quelle in cui le vibrazioni sono parallele alla velocità dell'onda. Le onde possono essere monodimensionali (corda ideale vibrante), bidimensionali (sasso nell'acqua), tridimensionali (suono). Di solito quando si parla di onde si parla di treno d'onde periodico, il caso più semplice è l'onda armonica in cui tutte le particelle subiscono un moto armonico semplice. Per le onde trasversali si parla anche di polarizzazione, cioè l'orientamento del piano di vibrazione, che può essere costante (onda polarizzata) o meno.

Se mandiamo due impulsi in un mezzo elastico:



$$f(x) = f(x') = f(x - vt)$$

questo perché la forma d'onda non cambia. Questa è un'onda progressiva, cioè un'onda che si propaga nel verso positivo delle x , se fosse al contrario sarebbe un'onda regressiva e sarebbe

$$f(x) = f(x + vt)$$

10.1 Onde sinusoidali

Caso onda progressiva: $y(x, t) = f(x - vt)$ al tempo zero:

$$y(x, 0) = f(x) = y_m \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

$$\lambda = vT$$

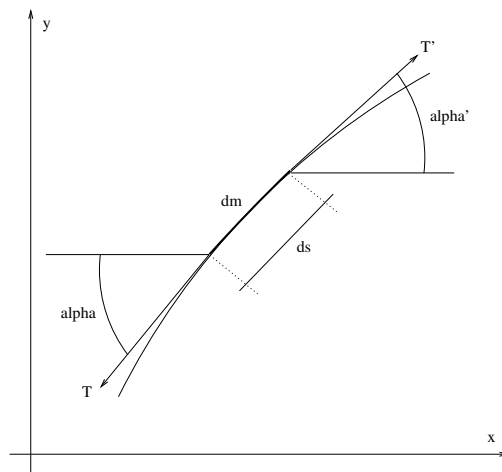
$$y(x, t) = f(x - vt) = y_m \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] = y_m \sin(kx - \omega t)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

k numero d'onda, ω pulsazione. Considerando anche la fase φ :

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

10.2 Corda Tesa



Trascuriamo il peso. Sull'elemento infinitesimo dx agiscono due tensioni:

$$\vec{T}' + \vec{T} = dm\vec{a}$$

$$\begin{cases} T' \cos \alpha' - T \cos \alpha = dma_x = 0 \\ T' \sin \alpha' - T \sin \alpha = dma_y \end{cases}$$

Per deformazioni piccole usiamo il primo sviluppo di Taylor:

$$\cos \alpha = 1 + \dots \quad \sin \alpha = \alpha + \dots$$

$$\begin{cases} T' = T \\ T' \alpha' - T \alpha = dma_y = dma \end{cases}$$

Ma il primo sviluppo di Taylor del seno è uguale a quello della tangente:

$$T \tan \alpha' - T \tan \alpha = dma$$

Ma la tangente è la derivata delle y nelle x :

$$T \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+dx} - T \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x = dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$T \left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_x dx = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dm$$

Chiamiamo ρ la densità lineare:

$$\rho = \frac{dm}{ds} \quad dm = \rho s \quad ds \cos \alpha = dx \quad dm = \rho dx$$

$$T \left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_x dx = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{equazione di D'Alembert}$$

10.3 Equazione differenziale di un'onda

Nel caso progressivo:

$$y = f(x - vt) \quad z = x - vt$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial t} \frac{1}{\frac{\partial z}{\partial t}} = -\frac{1}{v} \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{1}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right) \frac{\partial t}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{v} \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{1}{-v} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \frac{1}{-v} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\
\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\
\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{10.1}$$

Nel caso della corda tesa $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$. Nella velocità ci sono sempre due termini, uno di elasticità del mezzo (in questo caso T) e uno di inerzia (in questo caso ρ).

Nel caso di onda regressiva l'equazione differenziale è uguale, anche nei segni.

10.4 Velocità e accelerazione trasversale

$$\begin{aligned}
u_y(x, t) &= \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [y_m \sin(kx - \omega t)] = -y_m \omega \cos(kx - \omega t) \\
a_y(x, t) &= \frac{\partial u_y}{\partial t} = -y_m \omega^2 \sin(kx - \omega t) = -\omega^2 y
\end{aligned}$$

10.5 Principio di sovrapposizione

Principio 10.1 (sovrapposizione) *In un mezzo in cui due onde si sovrappongono, la perturbazione è la somma delle due onde.*

10.5.1 Interferenza

L'interferenza è la sovrapposizione di due onde sinusoidali. Prendiamo due onde progressive, sinusoidali, con stessa ampiezza e frequenza, ma con diversa fase. La differenza di fase è la costante di fase.

$$y_1 = y_m \sin(kx - \omega t) \quad y_2 = y_m \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

$$\begin{aligned}
y_1 + y_2 &= y_m [\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t + \varphi)] \\
&= y_m \left[2 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \\
&= \left(2y_m \cos \frac{\varphi}{2} \right) \sin \left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2} \right)
\end{aligned}$$

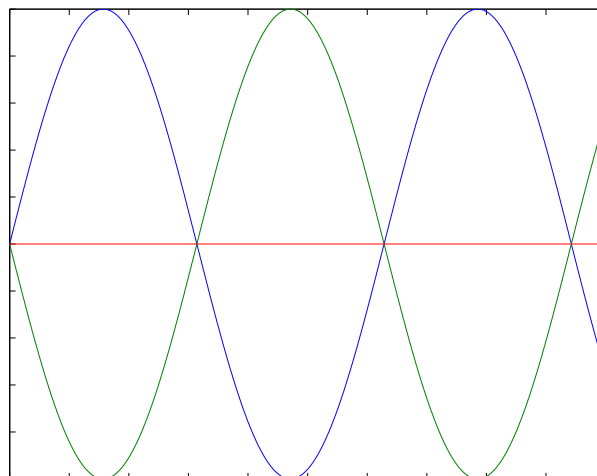


Figura 10.1: Interferenza distruttiva

L'ampiezza delle onde non è più costante, ma è una funzione armonica. Si distinguono due casi particolari:

$\varphi = 0 + 2k\pi$	$y_m \rightarrow 2y_m$	Interferenza costruttiva
$\varphi = \pi + 2k\pi$	$y_m \rightarrow 0$	Interferenza distruttiva

10.6 Onde stazionarie

Le onde stazionarie sono il frutto dell'interferenza di un'onda progressiva e una regressiva, tipicamente di un'onda con la sua riflessa.

$$y_1 = y_m \sin(kx - \omega t) \quad y_2 = y_m \sin(kx + \omega t)$$

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = y_m [\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)] \\ &= 2y_m [\sin(kx) \cos(\omega t)] \end{aligned}$$

La parte spaziale e quella temporale si separano. Se consideriamo con ampiezza $2y_m \sin(kx)$ allora ci sono dei punti dove il seno si annulla che non vibrano, sono i nodi, mentre dove la vibrazione è massima ci sono i ventri. Nodi:

$$\begin{aligned} \sin(kx) &= 0 & kx &= 0, \pi, \dots \\ n\pi &= kx & k &= \frac{2\pi}{\lambda} & x &= n \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

Le onde stazionarie non trasportano energia.

10.7 Effetto Doppler

L'effetto Doppler si sviluppa quando la sorgente delle onde e l'osservatore sono in moto relativo. Immaginando la sorgente che emette onde con velocità di propagazione u e lunghezza d'onda λ ferma e l'osservatore in allontanamento con velocità v il numero di fronti d'onda che l'osservatore riceve nel tempo t è:

$$N = \nu t = \nu_0 t - \frac{vt}{\lambda}$$

$$\nu = \nu_0 + \frac{v}{\lambda} = \nu_0 - \frac{v}{u} \nu_0 = \nu_0 \left(1 - \frac{v}{u}\right) \quad (10.2a)$$

Nel caso inverso nel quale sia la sorgente a muoversi con velocità v bisogna scambiare ν con ν_0 :

$$\nu = \nu_0 \frac{u}{u - v} \quad (10.2b)$$

10.7.1 Effetto Doppler relativistico

Consideriamo l'ultimo caso trattato in funzione del periodo anziché della frequenza nel caso di onde luminose:

$$T = T'_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

T'_0 è il periodo proprio della sorgente misurato da un osservatore che si muove con la sorgente alla velocità v , quindi dall'osservatore fermo esso viene percepito come:

$$T_0 = \frac{T'_0 + \frac{\beta}{c} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (10.3a)$$

Se consideriamo la sorgente come origine del sistema in moto allora $x' = 0$:

$$T = \frac{T_0 (1 - \beta)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (10.3b)$$

10.8 Suono

Il suono è un'onda longitudinale che si propaga di solito nell'aria provocando zone con maggiore pressione e zone con minore pressione e quindi zone con maggior densità e zone di rarefazione. Il suono percepito dall'uomo è

quello che ha frequenza $20 \div 20000$ Hz. Sotto ci sono gli infrasuoni, sopra gli ultrasuoni. La velocità del suono è:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (10.4)$$

B è il coefficiente di comprimibilità definito come:

$$B = \frac{-\Delta p}{\Delta V/V} \quad (10.5)$$

Se approssimiamo il comportamento dell'aria ad un gas adiabatico, supponendo quindi che il suono si propaghi più veloce del calore si ha:

$$PV^\gamma = \text{const} \quad d(PV^\gamma) + P\gamma V^{\gamma-1}dV = 0$$

$$\frac{dP}{dV/V} = -\gamma P \quad v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = 330 \text{ m/s}$$

10.9 Grandezze caratteristiche

intensità del suono I = Energia/tempo superficie

soglia di udibilità $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$

altezza del suono la frequenza

timbro del suono è la forma d'onda, cioè la composizione in armoniche dello sviluppo di Fourier

sensazione sonora non è lineare $10 \log_{10} I/I_0$ e si misura in decibel dB

soglia del dolore 120 dB

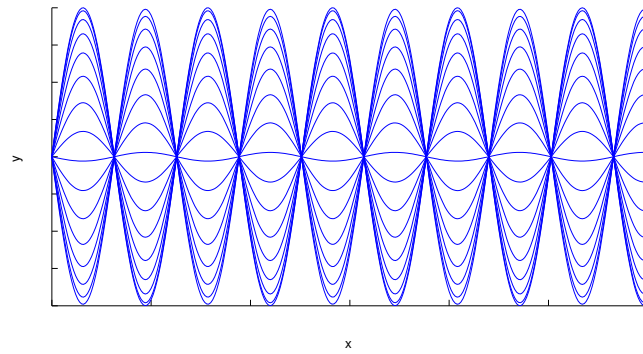


Figura 10.2: famiglia di onde stazionarie disegnate a intervalli costanti di tempo

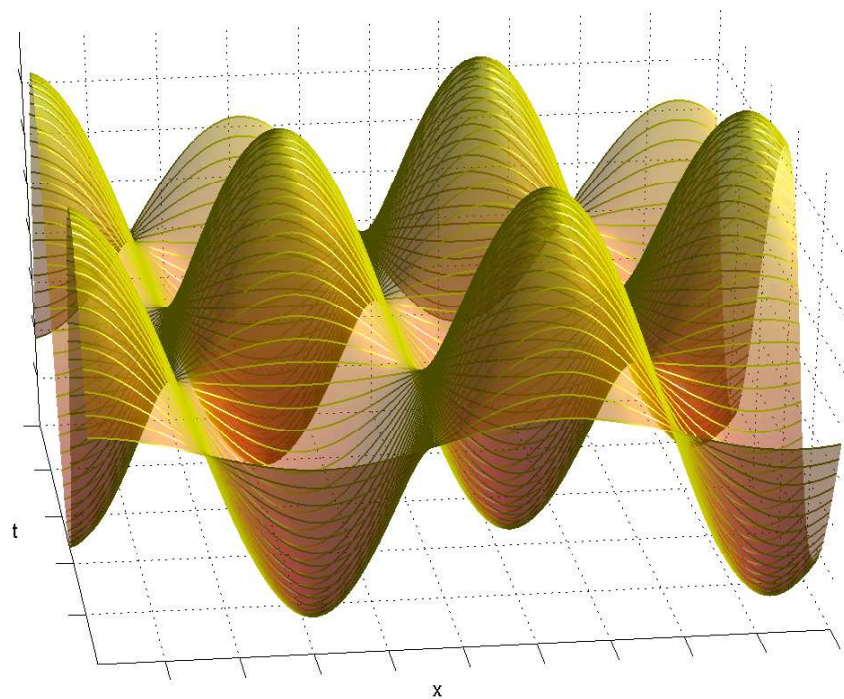


Figura 10.3: Onde stazionarie in tre dimensioni

11

Ottica geometrica

L'ottica geometrica è il modo di studiare l'ottica più antico. Nel '600 non si aveva chiaro cosa fosse la luce e veniva descritta attraverso i raggi.

11.1 Onde

Ogni onda è descritta dai fronti d'onda, che corrispondono alle creste e ai seni dell'onda. I raggi sono segmenti orientati, perpendicolari ai fronti d'onda, uscenti dalla sorgente. Le onde si dividono in sferiche, circolari, piane, ... a seconda della geometria. Spesso a grandi distanze dalla sorgente possono essere descritte come onde piane.

I corpi colpiti da radiazione elettromagnetica in parte la riflettono, in parte la assorbono e in parte la trasmettono. I corpi opachi assorbono molto, cioè trasformano la luce in qualcos'altro (calore). I corpi trasparenti trasmettono molta luce. Bisogna indicare rispetto a che radiazione i corpi sono trasparenti o opachi, per esempio il vetro, trasparente alla luce visibile, è opaco agli UV.

Quasi tutti i corpi opachi (non le superfici riflettenti) diffondono la luce in tutte le direzioni, si parla di riflessione diffusa, cioè riflettono la luce in tutte le direzioni.

Principio 11.1 (Fermat) *il percorso della luce è tale che risulti stazionario, cioè è un minimo o un massimo.*

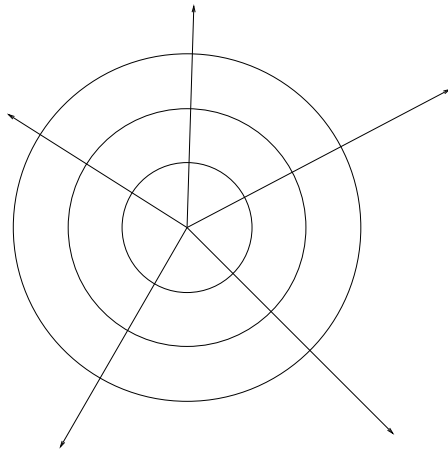


Figura 11.1: Fronti d'onda circolare e raggi

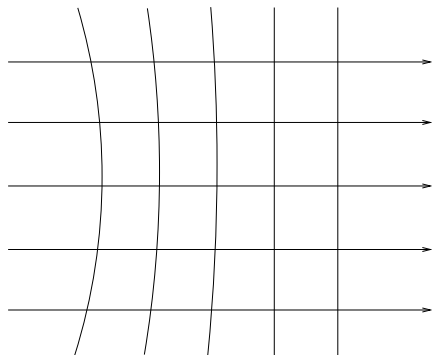
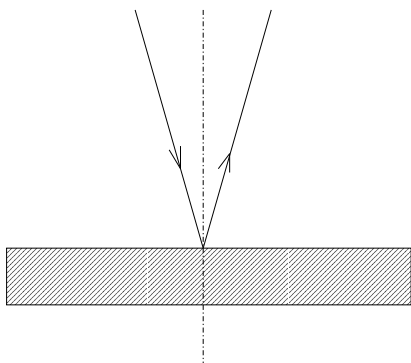


Figura 11.2: Fronti d'onda circolare a grande distanza sono considerati piani

11.2 Riflessione

11.2.1 Specchio piano

Come negli urti il raggio riflesso e quello incidente stanno nello stesso piano individuato con la normale; l'angolo di incidenza è uguale a quello di riflessione.



11.2.2 Elissoide

$$\overline{F_1P} = \overline{F_2P}$$

11.2.3 Specchi sferici

Angoli piccoli, piccole aperture. Specchio concavo $R > 0$, specchio convesso $R < 0$. Immagine reale $q > 0$, immagine virtuale $q < 0$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

Quindi se i raggi sono paralleli:

$$p \rightarrow \infty \Rightarrow p \rightarrow f = \frac{R}{2}$$

11.3 Rifrazione

La rifrazione avviene quando cambia il mezzo:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n_{12} = \frac{n_2}{n_1}$$

n_{12} = indice di rifrazione relativo ai due mezzi

n_1 = indice di rifrazione assoluto del primo mezzo (rispetto al vuoto) > 1

Il percorso non risulta il più corto, ma è il più breve (è un minimo):

$$t_A^B = t_1 + t_2 = \frac{AP}{v_1} + \frac{PB}{v_2} = \frac{n_1}{c}AP + \frac{n_2}{c}PB = \frac{1}{c}(n_1AP + n_2PB)$$

11.3.1 Lenti sottili

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$



Costanti¹

A.1 Costanti matematiche

Simbolo	Valore
π	3.141 592 653 591 403 978 482 542 414 219 279 663 919 893 234 825 ...
π^2	9.869 604 401 089 358 618 834 490 999 876 151 135 313 699 407 240 ...
$\sqrt{\pi}$	1.772 453 850 905 516 027 298 167 483 341 145 182 797 549 456 122 ...
e	2.718 281 828 458 563 411 277 850 606 202 642 376 785 584 483 618 ...
e^2	7.389 056 098 930 650 227 230 427 460 575 007 813 180 315 570 551 ...
\sqrt{e}	1.648 721 270 700 128 146 848 650 787 814 163 571 653 776 100 710 ...
π/e	1.155 727 349 791 723 336 742 691 256 256 860 982 838 416 464 162 ...
e/π	0.865 255 979 431 664 940 921 802 827 901 482 365 570 974 166 378 ...
$4\pi \times 10^{-7}$	1.256 637 061 435 917 295 385 057 353 311 801 153 678 867 ... $\times 10^{-6}$

¹Tratto da [14], sorgente: physics.nist.gov/constants

A.2 Costanti universali

costante	simbolo	valore	unità	errore rel
velocità della luce nel vuoto	c, c_0	299 792 458	m s^{-1}	esatto
Permeabilità magnetica del vuoto	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} = 12.566\,370\,614 \dots \times 10^{-7}$	N A^{-2}	esatto
Costante dielettrica del vuoto $1/\mu_0 c^2$	ε_0	$8.854\,187\,817 \dots \times 10^{-12}$	F m^{-1}	esatto
Impedenza del vuoto $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = \mu_0 c$	Z_0	376.730 313 461 ...	Ω	esatto
Costante di gravitazione universale	G	$6.6742(10) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$	1.5×10^{-3}
Costante di Planck	$G/\hbar c$	$6.707(10) \times 10^{-39}$	$(\text{GeV}/c^2)^{-2}$	1.5×10^{-3}
	h	$6.626\,069\,3(11) \times 10^{-34}$	J s	7.8×10^{-7}
		$4.135\,667\,27(16) \times 10^{15}$	eV s	3.9×10^{-8}
$h/2\pi$	\hbar	$1.054\,571\,68(18) \times 10^{-34}$	J s	7.8×10^{-7}
		$6.582\,119\,89(26) \times 10^{-16}$	eV s	3.9×10^{-8}
Massa di Planck $(\hbar c/G)^{1/2}$	m_P	$2.176\,7(16) \times 10^{-8}$	kg	7.5×10^{-4}
Lunghezza di Planck $\hbar/m_P c = (\hbar G/c^3)^{1/2}$	l_P	$1.616\,0(12) \times 10^{-35}$	m	7.5×10^{-4}
Tempo di Planck $l_P/c = (\hbar G/c^5)^{1/2}$	t_P	$5.390\,6(40) \times 10^{-44}$	s	7.5×10^{-4}

A.3 Costanti elettromagnetiche

costante	simbolo	valore	unità	errore rel
Carica elementare	e	$1.602\,176\,53(14) \times 10^{-19}$	C	8.5×10^{-8}
	e/h	$2.417\,989\,491(95) \times 10^{14}$	A J ⁻¹	3.9×10^{-8}
Flusso magnetico quantico $h/2e$	Φ_0	$2.067\,833\,72(18) \times 10^{-15}$	Wb	8.5×10^{-8}
Conduttanza quantica $2e^2/h$	G_0	$7.748\,091\,696(28) \times 10^{-5}$	s	3.7×10^{-9}
Inverso della conduttanza quantica	G_0^{-1}	12 906.403 786(47)	Ω	3.7×10^{-9}
Costante di Josephson $2e/h$	K_J	$483\,597.898(19) \times 10^9$	Hz V ⁻¹	3.9×10^{-8}
Costante di von Klitzing $h/e^2 = \mu_0 c/2\alpha$	R_K	25 814.807 572(95)	Ω	3.7×10^{-9}
Magnetone di Bohr $e\hbar/2m_e$	μ_B	$927.400\,899(37) \times 10^{-26}$	J T ⁻¹	4.0×10^{-8}
		$5.788\,381\,749(43) \times 10^{-5}$	eV T ⁻¹	7.3×10^{-9}
	μ_B/h	$13.996\,246\,24(56) \times 10^9$	Hz T ⁻¹	4.0×10^{-8}
	μ_B/hc	46.686 452 4(19)	m ⁻¹ T ⁻¹	4.0×10^{-8}
	μ_b/k	0.471 713 1(12)	K T ⁻¹	1.7×10^{-6}

A.4 Costanti atomiche e nucleari

A.4.1 Generali

costante	simbolo	valore	unità	errore rel
Costante di struttura fine $e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$	α	$7.297\,352\,533(27) \times 10^{-3}$		3.7×10^{-9}
Inverso della costante di struttura fine	α^{-1}	137.035 999 76(50)		3.7×10^{-9}
Costante di Rydberg $\alpha^2 m_e c/2h$	R_∞	10 973 731.568 549(83)	m ⁻¹	7.6×10^{-12}
	$R_\infty c$	$3.289\,841\,960\,368(25) \times 10^{15}$	Hz	7.6×10^{-12}
	$R_\infty hc$	$2.179\,871\,90(17) \times 10^{-18}$	J	7.8×10^{-8}
	$R_\infty hc$	13.605 691 72(53)	eV	3.9×10^{-8}

A.4.2 Elettrone, e^-

costante	simbolo	valore	unità	errore rel
massa elettrone	m_e	$9.109\,381\,88(72) \times 10^{-31}$	kg	7.9×10^{-8}
		$5.485\,799\,110(12) \times 10^{-4}$	u	2.1×10^{-9}
energia equivalente	$m_e c^2$	$8.187\,104\,14(64) \times 10^{-14}$	J	7.9×10^{-8}
		$0.510\,998\,902(21)$	MeV	4.0×10^{-8}
rapporto massa elettrone muone	m_e/m_μ	$4.836\,332\,10(15) \times 10^{-3}$		3.0×10^{-8}
rapporto massa elettrone tau	m_e/m_τ	$2.87555(47) \times 10^{-4}$		1.6×10^{-4}
rapporto massa elettrone protone	m_e/m_p	$5.446\,170\,232(12) \times 10^{-4}$		2.1×10^{-9}
rapporto massa elettrone neutrone	m_e/m_n	$5.438\,673\,462(12) \times 10^{-4}$		2.2×10^{-9}
rapporto massa elettrone deuterone	m_e/m_d	$2.724\,437\,117\,0(58) \times 10^{-4}$		2.1×10^{-9}
rapporto massa elettrone particella alfa	m_e/m_α	$1.370\,933\,561\,1(29) \times 10^{-4}$		2.1×10^{-9}
rapporto carica massa	e/m_e	$-1.758\,820\,174(71) \times 10^{11}$	C kg $^{-1}$	4.0×10^{-8}
massa molare $N_A m_e$	$M(e), M_e$	$5.485\,799\,110(12) \times 10^{-7}$	kg mol $^{-1}$	2.1×10^{-9}
lunghezza d'onda di Compton $h/m_e c$	λ_C	$2.426310215(18) \times 10^{-12}$	m	7.3×10^{-9}
$\lambda_C/2\pi = \alpha a_0 = \alpha^2/4\pi R_\infty$		$386.159\,264\,2(28) \times 10^{-15}$	m	7.3×10^{-9}
raggio classico dell'elettrone	r_e	$2.817\,940\,285(31) \times 10^{-15}$	m	1.1×10^{-8}

A.4.3 Muone, μ^-

costante	simbolo	valore	unità	errore rel
massa	m_μ	$1.883\,531\,09(16) \times 10^{-28}$	kg	8.4×10^{-8}
		$0.113\,428\,916\,8(34)$	u	3.0×10^{-8}
energia equivalente	$m_\mu c^2$	$1.692\,833\,32(14) \times 10^{-11}$	u	8.4×10^{-8}
		$105.658\,356\,8(52)$	MeV	4.9×10^{-8}

A.4.4 Tau, τ^-

costante	simbolo	valore	unità	errore rel
massa	m_τ	$3.167\,88(52) \times 10^{-27}$	kg	1.6×10^{-4}

A.4.5 Protone, p

costante	simbolo	valore	unità	errore rel
massa	m_p	$1.672\,621\,58(13) \times 10^{-27}$	kg	7.9×10^{-8}

A.4.6 Neutrone, n

costante	simbolo	valore	unità	errore rel
massa	m_n	$1.674\,972\,16(13) \times 10^{-27}$	kg	7.9×10^{-8}

A.4.7 Particella alfa, α

costante	simbolo	valore	unità	errore rel
massa	m_α	$6.644\,655\,98(52) \times 10^{-27}$	kg	7.9×10^{-8}

A.5 Costanti fisico-chimiche

costante	simbolo	valore	unità	errore rel
Numero di Avogadro	N_A, L	$6.022\,141\,99(47) \times 10^{23}$	mol^{-1}	7.9×10^{-8}
Costante di massa atomica $m_u = \frac{1}{12}m_{12\text{C}} = 1\text{u} = 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}/N_A$	m_u	$1.660\,538\,73(13) \times 10^{-27}$	kg	7.9×10^{-8}
energia equivalente dell'unità di massa atomica	$m_u c^2$	$1.492\,417\,78(12) \times 10^{-10}$	J	7.9×10^{-8}
		931.494 013(37)	MeV	4.0×10^{-8}
Costante di Faraday $N_A e$	F	964 853 415(39)	C mol^{-1}	4.0×10^{-8}
Mole di Plank	$N_A h$	$3.990\,312\,689(30) \times 10^{-10}$	J s mol^{-1}	7.6×10^{-9}
	$N_A h c$	0.119 626 564 92(91)	J m mol^{-1}	7.6×10^{-9}
Costante dei gas	R	8.314 472(15)	$\text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$	1.7×10^{-6}
Costante di Boltzmann R/N_A	k	$1.380\,650\,3(24) \times 10^{-23}$	J K^{-1}	1.7×10^{-6}
		$8.617\,342(15) \times 10^{-5}$	eV K^{-1}	1.7×10^{-6}

A.6 Dati astronomici

Proprietà	Sole	Terra	Luna
Massa (kg)	1.99×10^{30}	5.98×10^{24}	7.36×10^{22}
Raggio medio (m)	6.96×10^8	6.37×10^6	1.74×10^6
Massa volumica media (kg/m ³)	1410	5520	3340
Accelerazione gravitazionale alla superficie (m/s ²)	274	9.81	1.67
velocità di fuga (km/s)	618	11.2	2.38
Periodo di rotazione (d)	26 ÷ 37	0.997	27.3
Raggio medio dell'orbita (km)	2.6×10^{17}	1.50×10^8	3.82×10^5
Periodo di rivoluzione	2.4×10^8 y	1.00 y	27.3 d

B

Unità derivate

Grandezza	Nome	Simbolo	Unità equivalenti
superficie	metro quadrato	m^2	
volume	metro cubo	m^3	
frequenza	hertz	Hz	s^{-1}
densità	kilogrammo al metro cubo	kg/m^3	
velocità	metro al secondo	m/s	
velocità angolare	radiante al secondo	rad/s	s^{-1}
accelerazione	metro al secondo quadrato	m/s^2	

B.1 Elettrodinamica

Grandezza	Nome	Simbolo	Unità equivalenti
Carica	coulomb	C	A s
Potenziale elettrostatico	volt	V	$\text{m}^2 \text{kg s}^{-3} \text{A}^{-1}$



Momenti d'inerzia

Geometria	Momento d'inerzia
Anello rispetto al suo asse di simmetria	MR^2
Guscio cilindrico rispetto all'asse del cilindro	$\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$
Cilindro pieno (o disco) rispetto all'asse del cilindro	$\frac{1}{2}MR^2$
Cilindro pieno (o disco) rispetto a un asse diametricale passante per il centro di massa	$\frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$
Sbarretta sottile rispetto a un asse ortogonale passante per il centro di massa	$\frac{1}{12}ML^2$
Sbarretta sottile rispetto a un asse ortogonale passante per un estremo	$\frac{1}{3}ML^2$
Sfera piena rispetto a un asse diametricale	$\frac{2}{5}MR^2$
Guscio sferico sottile rispetto a un asse diametricale	$\frac{2}{3}MR^2$
Anello rispetto a un asse diametricale	$\frac{1}{2}MR^2$
Lamina rettangolare rispetto a un asse ortogonale passante per il centro	$\frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$

D

Formule che nessuno ricorda mai

D.1 Trigonometria

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cos \alpha$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} \quad \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \quad \sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)]$$

$$\sin \delta + \sin \gamma = 2 \sin \frac{\delta + \gamma}{2} \cos \frac{\delta - \gamma}{2}$$

$$\sin \delta - \sin \gamma = 2 \cos \frac{\delta + \gamma}{2} \sin \frac{\delta - \gamma}{2}$$

$$\cos \delta - \cos \gamma = 2 \cos \frac{\delta + \gamma}{2} \sin \frac{\delta - \gamma}{2}$$

$$\begin{aligned}\cos \delta + \cos \gamma &= 2 \cos \frac{\delta + \gamma}{2} \cos \frac{\delta - \gamma}{2} \\ \cos \delta - \cos \gamma &= 2 \sin \frac{\delta + \gamma}{2} \sin \frac{\delta - \gamma}{2}\end{aligned}$$

D.2 Sviluppi in serie di potenze

$$\begin{aligned}e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots \\ \log(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \\ (1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \binom{\alpha}{4} x^4 + \dots^1\end{aligned}$$

D.3 Operatori vettoriali

D.3.1 Gradiente

Coordinate Cilindriche

$$\left(\vec{\nabla} \varphi\right)_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad \left(\vec{\nabla} \varphi\right)_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \quad \left(\vec{\nabla} \varphi\right)_w = \frac{\partial \varphi}{\partial w}$$

Coordinate Sferiche

$$\left(\vec{\nabla} \varphi\right)_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad \left(\vec{\nabla} \varphi\right)_\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad \left(\vec{\nabla} \varphi\right)_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi}$$

1

$$\binom{\alpha}{y} = \frac{\overbrace{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-y+1)}^{y \text{ volte}}}{y!}$$

Bibliografia

- [1] prof. Antonino Pullia per tutta Fisica 1
- [2] prof. Marcello Fontanesi per tutta Fisica 2
- [3] prof. Giancarlo Bardini per tutta Fisica 3
- [4] prof. Marco Paganoni, per la parte sulla teoria cinetica dei gas perfetti
- [5] prof. Lucchini, per la parte sui moti armonici, sull'energia delle orbite e su ottica geometrica
- [6] prof. Giovanni Franzoni, per la parte sull'effetto Doppler
- [7] prof.sa Monica Ballerini, per molti esempi di fisica 2, effetto Hall
- [8] prof. Ruggero Barni, per molti esempi di fisica 2, sistemi di coordinate, multipoli
- [9] Resnick, Halliday, Krane: *Fisica 1* Casa Editrice Ambrosiana
- [10] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, Matthew Sands: *The Feynman Lectures on Physics* Addison-Wesley Publishing Company
- [11] Neil Ashby, Stanley C. Miller: *Principles of Modern Physics* Holden-Day, Inc.
- [12] Pietro Caldirola, Marcello Fontanesi, Elio Sindoni: *Elettromagnetismo – parte I e II* Masson
- [13] Murray R. Spiegel: *Manuale di Matematica* collana Schaum Etas Libri
- [14] Peter J. Mohr and Barry N. Taylor, *CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 1998, Journal of Physical and Chemical Reference Data*, Vol. 28, No. 6, 1999 and *Reviews of Modern Physics*, Vol. 72, No. 2, 2000

Indice analitico

A		centro di massa	25
accelerazione	11	ciclo	
angolare	12	di Carnot	84, 96
di gravità	49	Otto	86
perpendicolare	14	circuitazione	
radiale	14	di una forza	40
relativistica	114	Clausius	88
α <i>vedi</i> accelerazione angolare		composizione delle velocità	16
altezza		relativistiche	107
del suono	125	conduzione	76
ambiente	65	conservazione	
ampere	3	dell'energia meccanica	41
attrito		contrazione delle lunghezze . . .	105
dinamico	18	convezione	77
statico	18	coordinate	5
B		polari	13
bilancia		corda tesa	120
di torsione	50	Coriolis	24
Boltzman	95	corrente	
Boyle	67	elettrica	3
C		covarianza	16
calore specifico	77	curve	
dei gas	79	di calibrazione	117
dei solidi	78	D	
candela	3	densità	52
capacità		derivata	
termica	77	di un vettore	9
dei gas	79	parziale	39
dei solidi	78	differenziale	
molare	77	esatto	40
specifica	77	totale	40
Carnot	84	dilatazione dei tempi	106, 116
		dilatazione termica	67

dinamica		di Torricelli	54
dei fluidi	59	etere	98
distribuzione		Eulero	59
dell'energia	73		
delle velocità	71	F	
Doppler	124	fluidostatica	52
Dulong	77, 79	Focault	24
		forma differenziale	
E		lineare	40
effetto		forza	
Doppler	124	apparente	22
relativistico	124	centrifuga	24
Einstein		conservativa	40, 41
postulati di	101	di Coriolis	24
elettronvolt	113	elastica	17
energia		fondamentale	17
cinetica	39	relativistica	114
cinetica		variabile	19
relativistica	110	nel tempo	19
di un'orbita	51	nella velocità	21
interna	78	nello spazio	20
media	74	frigorifero	85
potenziale	41	perfetto	94
relativistica	110, 112	fronti	
entropia	89	d'onda	127
per qualsiasi trasformazione ..		funzione	
93		di stato	79
nei cicli	91		
secondo Boltzman	95	G	
equazione		Gay Lussac	67
dei gas perfetti	67	gradiente	9
di Bernoulli	61	grandezze	2
di continuità	60	scalari	2
differenziale di un'onda ...	121	tensoriali	2
equilibrio		vettoriali	2
chimico	66	gravitazione	45
meccanico	65		
termico	66	I	
esperimento		impulso di una forza	27
delle due semisfere	55	intensità	
di Michelson–Morley ..	98–101	del suono	125
		luminosa	3

interferenza	122
distruttiva	123
invarianza	16
irraggiamento	76

K

Kelvin	88
kelvin	3
Keplero	45
kilogrammo	3

L

Lagrange	59
lavoro	37
su un gas	80
legge	
dei gas perfetti	67
dei vasi comunicanti	54
di Boltzman	95
di Boyle	67
di Gay Lussac	67
di Leonardo	60
di Stevino	53
leggi	
di Keplero	45
di Leonardo	18
lenti	
sottili	130
Leonardo	18, 60
libero cammino medio	71
linee	
di flusso	60
Lorentz	102
lunghezza	3

M

macchina	
di Carnot	84
frigorifera	85
perfetta	85, 94
massa	3
longitudinale	114

molare	77
relativistica	108
trasversa	115
Maxwell	71, 78, 98
Mayer	81
meccanica dei fluidi	52–64
metro	3
Michelson	98
Minkowski	116
mole	3
momento	
d'inerzia	30
di una forza	33
Morley	98
moto	
armonico	14
smorzato	15
circolare	13
di un fluido	58
uniforme	12
del pendolo	20
qualsiasi	14
rettilineo uniforme	11
uniformemente accelerato ..	12

N

nodi	123
------------	-----

O

ω	<i>vedi</i> velocità angolare
onda	
armonica	119
bidimensionale	119
elettromagnetica	119
longitudinale	119
meccanica	119
monodimensionale	119
progressiva	120
regressiva	120
stazionaria	123
su corda tesa	120

trasversale 119
 tridimensionale 119
 onde 119
 ottica
 geometrica 127–130

P

parete
 adiabatica 65
 diatermica 65
 pendolo 20, 43
 balistico 30
 di Foucault 24
 Petit 77, 79
 polarizzazione 119
 portata
 di massa 60
 volumica 60
 posizione 10
 postulato
 di Einstein 101
 potenza 38
 pressione 52, 69
 atmosferica 55
 primo principio della termodinamica 79
 principi della dinamica 18
 principio
 dell'equipartizione dell'energia 78
 di Archimede 56
 di Carnot 97
 di corrispondenza 98
 di equivalenza 51
 di Pascal 55
 di sovrapposizione 122
 primo della termodinamica 79
 secondo della termodinamica 88, 94
 zero della termodinamica .. 66

prodotto
 misto 8
 scalare 8
 vettoriale 8

Q

quantità di moto 24
 relativistica 109, 112
 quantità di sostanza 3

R

raggi d'onda 127
 relatività
 ristretta *vedi* speciale
 speciale 98–118
 relazione
 di Mayer 81
 resistenza
 del mezzo 18
 riflessione 129
 rifrazione 129

S

scala assoluta 97
 scala termodinamica 97
 secondo 3
 secondo principio della termodinamica 88, 94
 sensazione sonora 125
 sistema 65
 aperto 65
 chiuso 65
 copernicano 45
 inerziale 23
 isolato 65
 ticonico 45
 tolemaico 45
 soglia
 del dolore 125
 di udibilità 125
 spazio

di Minkowski	116
specchio	
piano	129
sferico	129
suono	124
superficie	
isobarica	58

T

temperatura	66
temperatura termodinamica	3
tempo	3
teorema	
degli assi paralleli	33
di Carnot	88
di Gauss	
per la gravità	46
di Pappo–Guldino	27
di Steiner	33
lavoro–energia	39
relativistico	110
teoria cinetica del gas perfetto.	68
termodinamica	65–97
termometro	66
a gas perfetto	67
timbro	125
Torricelli	54
trasferimento di calore	76
trasformate	
di Lorentz	102–105
trasformazioni	
cicliche	83
di Galileo	16
di Lorentz	102–105
di un gas	80
irreversibili	80
politropiche	82
quasistatiche	65, 80
reversibili	65, 80
treno d'onde	119
tubo	

di flusso	60
-----------------	----

U

unità di misura	3
fondamentali	3
prefissi	4
universo	
termodinamico	65
urti	28
anelastici	29
elastici	28

V

variabile	
di stato	65
velocità	11
angolare	12
del suono	125
di fuga	42
di trascinamento	16
istantanea	11
media	11, 73
perpendicolare	14
più probabile	72
quadratica media	73
radiale	14
relativa	16
scalare	11
ventri	123
versore	5
vettore	5
viscosità	62
vuoto	55